Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. Thorsten Weist

WS 2014/15
17. Februar 2015

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
(a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und das harmonische Mittel der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6.
(b) Geben Sie eine Abbildung $h\colon \{1,2,3\} \to \{x,y,z\}$ an.

(c) Berechnen Sie die folgenden Summen.

(i) $\sum_{i=1}^{20}(3i+5) =$

(ii) $\sum_{i=0}^{4} \frac{3^i}{2^i} =$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
(a) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(i) $\dfrac{1}{2x-18} = \dfrac{1}{15-x}$ (ii) $-x^2 - 4x = |x+2| + 2$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung.

$$\frac{4x+1}{x-1} \geq 5$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

(a) Ein Betrag von 5000 Euro wird über 3 Jahre angelegt und jährlich einfach (d.h. ohne Zinseszins) verzinst. Die Zinsen betragen 2% im ersten, 3% im zweiten und 5% im dritten Jahr. Bestimmen Sie den Endwert der Anlage.

(b) Ein Kredit über 8000 Euro zu 10% Schuldverzinsung soll über 4 Jahre durch Ratentilgung abbezahlt werden.
  (i) Erstellen Sie einen Tilgungsplan für die Ratentilgung.
  (ii) Welchen Gesamtbetrag an Zinsen zahlt der Schuldner mit diesem Tilgungsplan über die gesamte Laufzeit?

Aufgabe 4 (6 Punkte).
(a) Welche Gesetze gelten für die Multiplikation von reellen 2×2 Matrizen? Kreuzen Sie die zutreffende Antwort an.

◯ Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz gelten.
◯ Das Assoziativgesetz gilt, aber das Kommutativgesetz gilt nicht.
◯ Das Kommutativgesetz gilt, aber das Assoziativgesetz gilt nicht.
◯ Weder das Assoziativ- noch das Kommutativgesetz gelten.

(b) Ist die Menge

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2 = 4x_3 - 2x_2 \right\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Handelt es sich bei der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 6x_1 - 5x_2 \end{pmatrix},$$

um eine lineare Abbildung? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5 (10 Punkte).

Gegeben ist die Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für die beiden verschiedenen Fälle

$$\text{(i) } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii) } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ an so, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ <u>keine</u> Lösung besitzt.

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.**
Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die folgende 3×3 Matrix

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det(B_a)$.

(b) Für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix B_a invertierbar? Bestimmen Sie für diese Fälle die inverse Matrix B_a^{-1}.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.**
Wir betrachten die reelle 2×2 Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix C.

(b) Untersuchen Sie die zugehörige lineare Abbildung $f_C \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_C(x) = Cx$$

auf Injektivität und Surjektivität.