Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. Thorsten Weist

WS 2014/15
24. März 2015

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
(a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der Zahlen $\frac{2}{3}$, 1, 2, 4, 6.

(b) Berechnen Sie die folgenden Summen.

(i) $\sum_{i=1}^{40}(2i-9) =$

(ii) $\sum_{i=0}^{4}(-3)^i =$

(iii) $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot 2^k =$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
(a) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(i) $|x+5| = 2x+1$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung.

$$\frac{3x+2}{x-2} \leq 4$$

Aufgabe 3 (8 Punkte).

(a) Eine Bank vergibt einen Kredit über $K_0 = 9930$ Euro zu 10% Schuldverzinsung mit einer Laufzeit von 3 Jahren, der mittels Annuitätentilgung abbezahlt werden soll. Die Bank berechnet die Annuität als $A = 3993$ Euro. Vervollständigen Sie den Tilgungsplan.

Jahr i	Restschuld K_{i-1}	Zinsen Z_i	Tilgung T_i	Annuität A_i
1	9930			3993
2				3993
3				3993

(b) Ein Betrag von 2000 Euro wird über 5 Jahre zu einem Zinssatz von 6% angelegt.

(i) Bestimmen Sie den Wert der Anlage nach 5 Jahren bei einfacher Verzinsung (d.h. ohne Zinseszins).

(ii) Bestimmen Sie den Wert der Anlage nach 5 Jahren bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins.

Sie dürfen die folgenden Näherungswerte verwenden:
$(1,5)^6 \approx 11,391$, $(1,05)^6 \approx 1,340$, $(1,005)^6 \approx 1,030$, $(1,6)^5 \approx 10,486$,
$(1,06)^5 \approx 1,338$, $(1,006)^5 \approx 1,030$, $(1,3)^5 \approx 3,712$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
(a) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? Entscheiden Sie durch Ankreuzen.

- Ist $\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 4x_2 = 0 \}$ ein Untervektorraum? ◯ Ja ◯ Nein
- Ist $\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0 \}$ ein Untervektorraum? ◯ Ja ◯ Nein
- Ist $\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 8 = x_3 - 1 \}$ ein Untervektorraum? ◯ Ja ◯ Nein
- Ist $\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3 \}$ ein Untervektorraum? ◯ Ja ◯ Nein

(b) Geben Sie eine <u>lineare</u> Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an. Begründen Sie kurz die Linearität!
Antwort:

(c) Ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert.
Antwort:

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{x_2 +{}} 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) Gegeben ist die lineare Abbildung $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die definiert ist durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} x.$$

(i) Welche Gleichung müssen y_1,y_2 und y_3 erfüllen, damit der Vektor $(y_1, y_2, y_3)^T$ im Bild von h liegt?

(ii) Ist die Abbildung h injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.**
Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$ der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A.

(c) Berechnen Sie die Determinante $\det(B_a)$.

(d) Für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix B_a invertierbar? Bestimmen Sie für diese Fälle die inverse Matrix B_a^{-1}.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.**
Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die 2×2 Matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix C_a in Abhängigkeit von der Zahl a.

(b) Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte der beiden Matrizen C_9 und C_{-2} (d.h., setzen Sie $a = 9$ bzw. $a = -2$ ein).

(c) Bestimmen Sie die dritte Potenz $C_a^3 = C_a \cdot C_a \cdot C_a$ der Matrix C_a.