

Mittelwerte

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Wie in der Vorlesung beschrieben, kann man diesen Zahlen verschiedene Mittelwerte, wie etwas das arithmetische Mittel, zuordnen. Ordnet man jeder Zahl x_i zusätzlich ein Gewicht w_i zu, so erhält man das entsprechende gewichtete Mittel. Ist $w_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$, so bekommt man das ursprüngliche Mittel.

Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ positiv sind und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$. Im Folgenden sei $w := \sum_{i=1}^n w_i$.

Das gewichtete arithmetische Mittel der Zahlen x_1, \dots, x_n zu den Gewichten w_1, \dots, w_n ist definiert als

$$AM(x_1, \dots, x_n; w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

Das gewichtete geometrische Mittel der Zahlen x_1, \dots, x_n zu den Gewichten w_1, \dots, w_n ist definiert als

$$GM(x_1, \dots, x_n; w_1, \dots, w_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{w}}.$$

Das gewichtete harmonische Mittel der Zahlen x_1, \dots, x_n zu den Gewichten w_1, \dots, w_n ist definiert als

$$HM(x_1, \dots, x_n; w_1, \dots, w_n) = \frac{w}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}.$$

Beispiele

Man kauft verschiedene Mengen einer Ware zu unterschiedlichen Preisen und will den Durchschnittspreis bestimmen. Konkret kauft eine Person 4000 Stück für 4 €, 5000 Stück für 5 € und 1000 Stück für 6 €. Dann ist der Durchschnittspreis das gewichtete arithmetische Mittel

$$AM(4, 5, 6; 4000, 5000, 1000) = \frac{47000}{10000} = 4,70 \text{ €}.$$

Man möchte den effektiven Jahreszins einer Kapitalanlage berechnen. Konkret wird ein gewisser Betrag für 10 Jahre angelegt, wobei in den ersten drei Jahren 5 %, in den darauffolgenden vier Jahren 4 % und in den letzten drei Jahren 7 % Zinsen bezahlt werden. Den effektiven Jahreszinssatz (bzw. den durchschnittlich jährlichen Zinssatz) bekommt man durch Bestimmung des gewichteten geometrischen Mittels

$$GM(1,05, 1,04, 1,07; 3, 4, 3) = (1,05^3 \cdot 1,04^4 \cdot 1,07^3)^{\frac{1}{10}} \approx 1,0519.$$

Der effektive Jahreszinssatz ist also 5,19 %.

Man will die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen: man fährt zum Beispiel 100 km mit 200 km/h und 100 km mit 100 km/h. Dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit das harmonische Mittel

$$HM(200, 100; 100, 100) = \frac{200}{\frac{100}{200} + \frac{100}{100}} \approx 133,33 \text{ km/h}.$$