3.5 Skalarprodukt und Norm

Definition 1 *Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

das Skalarprodukt von x und y. Dabei heißen x und y orhogonal, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.
Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

die Norm von x.

Bemerkung 2

- Es gilt $\langle x, y\rangle = x^T y$.

Satz 3 *Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle \lambda x, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle$ *(Linearität in der ersten Komponente)*
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *(Symmetrie)*
3. $\langle x, x\rangle > 0$, *wenn* $x \neq 0$

Bemerkung 4

- Wegen der zweiten Eigenschaft ist das Skalarprodukt auch linear in der zweiten Komponente.
- Es gilt also $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- Man kann $||x - y||$ als den Abstand von x und y verstehen bzw. $||x||$ als die Länge des Vektors x.

Satz 5 *Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $||x|| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Dreiecksungleichung)*
4. $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$ *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).*

Bemerkung 6

- Die zweite Eigenschaft kann zum Beispiel mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung hergeleitet werden
- Man nennt

  $$\cos \measuredangle(x, y) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

  den Winkel zwischen x und y. Dabei gilt

  $$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||} \leq 1.$$