Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Lösungsvorschlag für Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Es seien U und V zwei Untervektorräume im $\mathbb{R}^n$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) "Die Vereinigung $U \cup V$ ist stets ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^n$".
Antwort: Die Aussage ist falsch. Wir prüfen dies an einem Beispiel. Die beiden Geraden $U = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $V = \mathbb{R}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ sind Untervektorräume im $\mathbb{R}^2$. Die Vereinigung $U \cup V$ ist aber kein Untervektorraum, denn die Vektoren $x = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $y = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ sind beide in $U \cup V$, aber die Summe $x + y = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ist weder in U noch in V, also auch nicht in $U \cup V$.

(b) "Der Schnitt $U \cap V$ ist stets ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^n$".
Antwort: Diese Aussage ist richtig. Dazu muss man die drei Eigenschaften nachprüfen. (1) $U \cap V$ ist nicht leer, weil aus $0 \in U$ und $0 \in V$ auch $0 \in U \cap V$ folgt. (2) Sind $x, y \in U \cap V$, so ist $x + y \in U$, weil U ein Untervektorraum ist und $x, y \in U$ gilt. Genauso ist $x + y \in V$. Wie sehen also, dass $x + y \in U \cap V$ ist. (3) Ist $x \in U \cap V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda x \in U$, weil $x \in U$ und U ist ein Untervektorraum. Genauso folgt auch $\lambda x \in V$. Damit ist $\lambda x \in U \cap V$.

(c) "Falls ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $(2, 0, 7)^T$ und $(0, 0, 3)^T$ enthält, so enthält er auch den Vektor $(1, 0, 0)^T$".
Antwort: Die Aussage ist richtig, denn es ist $\frac{1}{2}(2, 0, 7)^T - \frac{7}{6}(0, 0, 3)^T = (1, 0, 0)^T$.

(Richtige Antwort = 1 Punkt, falsche Antwort = -1 Punkt, keine Antwort = 0 Punkte.)

Aufgabe 3. Man nennt eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ *symmetrisch*, falls $A^T = A$ gilt.

(a) Finden Sie eine symmetrische 3×3 Matrix mit mindestens vier verschiedenen Einträgen.
Antwort: Ein Beispiel einer symmetrischen 3×3 Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(b) Beweisen Sie mithilfe der Rechenregeln aus der Vorlesung:
Für jede Matrix $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$ ist die Matrix $B \cdot B^T$ symmetrisch.

Antwort: Aus der Vorlesung kennen wir zwei Rechenregeln: (1) $(X^T)^T = X$ und (2) $(X \cdot Y)^T = Y^T \cdot X^T$ für beliebige Matrizen X, Y. Definiere nun $C = B \cdot B^T$. Wir wollen zeigen, dass $C^T = C$ ist. Dies sieht man mit einer Rechnung:

$$C^T = (B \cdot B^T)^T \overset{(2)}{=} (B^T)^T \cdot B^T \overset{(1)}{=} B \cdot B^T = C.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ der symmetrischen $n \times n$-Matrizen ein Untervektorraum des Vektorraumes $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist.
Antwort: Hier müssen wir die definierenden Eigenschaften eines Untervektorraumes nachweisen.
(1) Die Menge der symmetrischen Matrizen ist nicht leer, denn die Nullmatrix ist symmetrisch.
(2) Sind $A, B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann müssen wir prüfen, dass $\lambda A + \mu B$ wieder eine symmetrische Matrix ist. Dies sieht man mit einer Rechnung

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda A)^T + (\mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T \overset{A, B \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})}{=} \lambda A + \mu B.$$