Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Lösungsvorschlag für Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Behauptung: "Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 3x - y$ ist surjektiv."
Antwort: Die Behauptung ist richtig, denn das Bild von f ist die Menge $\mathbb{R}$. Genauer ist für eine beliebige Zahl $z \in \mathbb{R}$ zum Beispiel der Vektor $(0,-z)^T \in \mathbb{R}^2$ im Urbild von z, das heißt, $f(0,-z) = z$.

(b) Behauptung: "Ist A eine quadratische invertierbare Matrix, so gilt stets $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$."
Antwort: Die Aussage ist richtig. Setze $B = A^T$, dann folgt mit den Rechenregeln aus der Vorlesung

$$B(A^{-1})^T = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E_n^T = E_n.$$

Damit ist $(A^{-1})^T$ die inverse Matrix zu B. Es ist also $(A^T)^{-1} = B^{-1} = (A^{-1})^T$.

Aufgabe 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie ggf. die inverse Matrix.

$$\text{(b) } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösung: (b) Die Matrix B ist nicht invertierbar. Dies kann man auf mehrere Arten überprüfen. Man kann zum Beispiel die Determinante von B mit der Regel von Sarrus ausrechnen und feststellen, dass $\det(B) = 0$ ist. Eine andere Möglichkeit ist B auf Zeilen-Stufen-Form zu bringen und zu sehen, dass eine Nullzeile auftritt. Dies kann man auch tun, indem man direkt mit dem Verfahren zur Inversenbildung anfängt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\to②-3①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to③+①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to③+②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Hier stellt man fest, dass die gegebene Matrix nicht invertierbar ist, denn die Matrix hat nicht den vollen Rang. Wir können hier also aufhören zu rechnen.

(c) Auch hier verwenden wir den Gauß-Algorithmus zur Bestimmung der Inversen. Wir werden sehen, dass C invertierbar ist, weil beim Umformen keine Nullzeile auftaucht.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\to②-2①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to③-3①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{③\to③-2②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to\frac{1}{2}③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{②\to②+2③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\to①-3③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{①\to①+2②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\to-②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Die Matrix C ist also invertierbar und es gilt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist. Bestimmen Sie die inverse Matrix Z^{-1}.

Lösung:

Aus der Vorlesung ist bekannt: die Matrix Z ist invertierbar genau dann, wenn $\det(Z) = ad - bc \neq 0$ ist. Wir nehmen also an, dass $ad - bc \neq 0$ ist. Unser Ziel ist es das Gauß-Verfahren anzuwenden. Dazu brauchen wir (mindestens) eine Zahl $\neq 0$ in der Matrix. Wir unterscheiden also zwei Fälle. Fall (1): $a \neq 0$ und Fall (2): $c \neq 0$. Wegen $ad - bc \neq 0$ muss einer dieser Fälle zutreffen! Wir diskutieren Fall (1). Der zweite Fall kann analog behandelt werden und man erhält dieselbe Formel.

Fall (1) $a \neq 0$:

Wir verwenden das Gauß-Verfahren. Wir dürfen dabei durch die Zahlen a und $ad-bc$ teilen und Zeilen mit diesen Zahlen multiplizieren, weil diese Zahlen (nach Voraussetzung) von Null verschieden sind!

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\to②-\frac{c}{a}①} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\to a②} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\to①-\frac{b}{ad-bc}②} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\to\frac{1}{a}①} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\to\frac{1}{ad-bc}②} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

Wir erhalten die Formel für die inverse Matrix

$$Z^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Den zweiten Fall behandelt man genauso, indem man erst die beiden Zeilen vertauscht. Man erhält dieselbe Formel für Z^{-1}.