Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Lösungsvorschlag für Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (Summenformeln). Berechnen Sie die folgenden Summen mit einer geeigneten Formel.

(a) $3+5+7+9+\cdots+27+29$ (b) $\sum_{i=0}^{6} 2^i$

Lösung:
Teil (a) kann mit der arithmetischen Summenformel bestimmt werden. Wir erhalten

$$3+5+7+9+\cdots+27+29=\sum_{i=1}^{14}(2i+1)=14\cdot\frac{3+29}{2}=14\cdot 16=224.$$

Für Teil (b) braucht man die geometrische Summenformel. Wir erhalten

$$\sum_{i=0}^{6} 2^i=\frac{1-2^7}{1-2}=2^7-1=127.$$

Aufgabe 2 (Gleichungen und Ungleichungen). Bestimmen Sie jeweils die Menge aller Lösungen $x\in\mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

(a) $4x^3+7x^2-14x+3=0$ (b) $|x-2|=|x|+2$ (c) $\frac{2x-1}{x+5}\leq 1$

Lösung: (a) Um Teil (a) zu lösen, raten wir zunächst eine Nullstelle. Durch ausprobieren findet man heraus, dass $x_1=1$ eine Nullstelle ist. Nun verwendet man Polynomdivision: Man teilt das Polynom $4x^3+7x^2-14x+3$ durch $x-1$ und erhält

$$4x^3+7x^2-14x+3:(x-1)=4x^2+11x-3.$$

Nun sucht man die Nullstellen des Polynoms $4x^2+11x-3$ mithilfe der abc-Formel (p-q-Formel, Mitternachtsformel...). Man erhält also

$$x_{2,3}=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{8}=\frac{-11\pm 13}{8}=\begin{cases}\frac{1}{4}\\ -3\end{cases}.$$

Insgesamt ist die Lösungsmenge der Gleichung also $\{1,\frac{1}{4},-3\}$.

(b) Hier müssen wir mehrere Fälle unterscheiden, um die Betragsstriche loszuwerden.
Fall 1: $x < 0$
In diesem Bereich ist die Gleichung äquivalent zur Gleichung $2 - x = -x + 2$. Diese ist unabhängig von x erfüllt, also sind alle negativen Zahlen Lösungen der Gleichung.
Fall 2: $0 \leq x \leq 2$
In diesem Bereich ist die Gleichung äquivalent zur Gleichung $2 - x = x + 2$. Man erhält hier nur die Lösung $x = 0$ und diese Lösung liegt wirklich im Intervall $[0, 2]$.
Fall 3: $x > 2$
Hier erhält man die Gleichung $x - 2 = x + 2$. Die Gleichung hat gar keine Lösung.

Zusammenfassend: Die Lösungsmenge der Gleichung ist das Intervall $(-\infty, 0]$.

(c) Zunächst stellen wir fest, dass die Ungleichung nicht überall definiert ist! Sie hat eine Definitionslücke bei $x = -5$. Um mit $x + 5$ multiplizieren zu können müssen wir zwei Fälle unterscheiden.
Fall 1: $x < -5$ also $x + 5 < 0$.
Multiplikation mit $x + 5$ ändert das Ungleichungszeichen und wir erhalten $2x - 1 \geq x + 5$. Umformen liefert $x \geq 6$. Da wir $x < -5$ angenommen haben, kann diese Gleichung nicht erfüllt sein. In diesem Fall erhalten wir keine Lösung.
Fall 2: $x > -5$ also $x + 5 > 0$.
Wir multiplizieren mit $x + 5$ und erhalten $2x - 1 \leq x + 5$ und damit $x \leq 6$. Wir erhalten also ein Lösungsintervall $(-5, 6]$.

Zusammenfassend: Da nur Fall 2 Lösungen der Ungleichung geliefert hat, ist das Intervall $(-5, 6]$ die Lösungsmenge der Ungleichung.

Aufgabe 3 (Mittelwerte)**.** Bestimmen Sie das (a) arithmetische, (b) harmonische und (c) geometrische Mittel der Zahlen $\frac{1}{2}, 1, 2, 4$.
Lösung: Das arithmetische Mittel ist

$$\mathrm{AM}(\frac{1}{2}, 1, 2, 4) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4) = \frac{15}{8}.$$

Das harmonische Mittel ist

$$\mathrm{HM}(\frac{1}{2}, 1, 2, 4) = \frac{4}{2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{16}{15}.$$

Das geometrische Mittel ist

$$\mathrm{GM}(\frac{1}{2}, 1, 2, 4) = (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4)^{1/4} = 4^{1/4} = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 4 (Zinsrechnung)**.** Sie legen 2000 Euro über 3 Jahre zu einem Zinssatz von 5% an. Bestimmen Sie den Wert der Anlage nach drei Jahren bei (a) einfacher Verzinsung und (b) Verzinsung mit Zinseszins.
Hinweis: $(1,3)^5 \approx 3,713$; $(1,5)^3 \approx 3,375$; $(1,03)^5 \approx 1,159$; $(1,05)^3 \approx 1,158$.
Lösung: Bei (a) einfacher Verzinsung ist der Wert nach drei Jahren gegeben durch

$$2000 \cdot (1 + 3 \cdot (0,05)) = 2000 \cdot (1,15) = 2300.$$

Nach drei Jahren erhält man also 2300 Euro zurück.
Bei (b) Verzinsung mit Zinseszins ist der Wert nach drei Jahren gegeben durch

$$2000 \cdot (1,05)^3 \approx 2000 \cdot 1,158 = 2316.$$

Nach drei Jahren erhält man also etwa 2316 Euro zurück.

Aufgabe 5 (Untervektorräume)**.** Ist die Menge

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$$

ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.
Lösung:
Die Menge U ist *kein* Untervektorraum, denn die definierenden Eigenschaften sind nicht erfüllt. Zum Beispiel ist der Vektor $u = (1, 0, 0)^T$ in der Menge U (denn $1 + 0 + 0 = 1 \geq 0$), aber der Vektor $(-3)u = (-3, 0, 0)^T$ liegt nicht in U (denn $-3 + 0 + 0 = -3 < 0$).

Aufgabe 6 (Lineare Abbildungen)**.** Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ob diese linear sind. Geben Sie für lineare Abbildungen die *Abbildungsmatrix* an, d.h., finden Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $f(x) = A \cdot x$ für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{(a) } f\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 6x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } f\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Die Abbildung f aus Teil (a) ist linear, denn

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x$$

und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Abbildungsmatrix von f.
Die Abbildung g aus Teil (b) ist nicht linear, denn

$$g((2,0)^T) = (4,0)^T \neq (2,0)^T = g\left((1,0)^T\right) + g\left((1,0)^T\right).$$

Aufgabe 7 (Invertierbare Matrizen)**.** Für welche reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B_a := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3a \\ -4 & -2 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie für diese Zahlen a die inverse Matrix B_a^{-1}.
Lösung:
Wir verwenden das übliche Verfahren um die Inverse zu bestimmen. Sobald wir die Matrix auf Zeilen-Stufen-Form gebracht haben, können wir den Rang in Abhängigkeit von a ablesen. So sehen wir, für welche Zahlen a die Matrix invertierbar ist und für diese Zahlen können wir den Algorithmus weiterausführen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3a & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{③\to③+2①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Schon nach diesem Schritt ist die Matrix auf Zeilen-Stufen-Form. Die Matrix hat den vollen Rang 3 genau dann, wenn $a \neq 0$ ist. Für $a = 0$ ist die Matrix also nicht invertierbar. Wir nehmen nun $a \neq 0$ an und machen weiter.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\to②-3③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\to①-②} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①\to\frac{1}{2}①} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to\frac{1}{a}③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{array}\right).$$

Für $a \neq 0$ ist B_a invertierbar und es gilt

$$B_a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & 1 & -3 \\ \frac{2}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (Determinante und Eigenwerte)**.** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Determinante und die Eigenwerte der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ist die zugehörige lineare Abbildung $f_C \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto Cx$ injektiv? Ist f_C surjektiv?

Lösung:

Das charakteristische Polynom $\chi_C(X)$ ist definiert als

$$\chi_C(X) := \det(C - XE_3) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 0 & 5-X & 12 \\ 0 & -2 & -5-X \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Determinante indem wir an der ersten Spalte eine Laplace Entwicklung durchführen:

$$\det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ 0 & 5-X & 12 \\ 0 & -2 & -5-X \end{pmatrix} = (3-X)\det \begin{pmatrix} 5-X & 12 \\ -2 & -5-X \end{pmatrix} + 0 + 0.$$

Nun muss man die Determinante der verbliebenen 2×2-Matrix bestimmen. Dies kann man entweder mit der Formel aus der Vorlesung machen, oder man entwickelt auch hier an der ersten Zeile. Wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\chi_C(X) = (3-X)\left((5-X)(-5-X)+24\right) = (3-X)\left(X^2-1\right) = -X^3+3X^2+X-3.$$

Die Determinante von C ist $\det(C) = \det(C - 0E_3) = \chi_C(0) = -3$. Die Eigenwerte der Matrix C sind die Nullstellen des Polynoms $\chi_C(X)$. Eine Nullstelle sieht man sofort anhand der obigen Formel $\chi_C(X) = (3 - X)(X^2 - 1)$; es ist $x_1 = 3$ eine Nullstelle. Polynomdivision des charakteristischen Polynoms $\chi_C(X)$ durch $(3 - X)$ ergibt $X^2 - 1$. Mit der abc-Formel (p-q-Formel...) ermittelt man die Nullstellen von $X^2 - 1$. Die Nullstellen sind $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$. Das charakteristische Polynom hat also drei Nullstellen $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$. Die Eigenwerte von C sind also 3,1 und -1.
Die Determinante von C ist nicht Null, also folgt mit dem Satz aus der Vorlesung sofort, dass f_C injektiv und surjektiv ist.