Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) "Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= r \\ 3x_1 + 2x_2 &= s \end{aligned}$$

hat für beliebig vorgegebene $r, s \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung."
Antwort: Die Aussage ist *richtig*, denn die Determinante ist $2{\cdot}2 - 3{\cdot}3 = -5 \neq 0$.

(b) "Gegeben sei ein Gleichungssystem $Ax = b$. Das Vertauschen zweier Spalten von A ändert die Lösungsmenge nicht."
Antwort: Die Aussage ist *falsch*. Dies sieht man schon an einem einfachen Beispiel: Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $\text{Lös}(A|b) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$. Vertauschen wir nun die Spalten von A, so erhalten wir die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und es gilt $\text{Lös}(B|b) = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Die Lösungsmenge hat sich also geändert!

Aufgabe 2. Wir erklären hier wie man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned} \tag{i}$$

löst. Die andere Teilaufgabe wurde in der Übung besprochen. Wir führen dazu die folgenden Schritte durch.

(a) Wir bestimmen die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ indem wir die Koeffizienten des Systems in eine Matrix schreiben. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

(b) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix mit Zeilenoperationen auf Zeilen-Stufen-Form.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{②\to②-4①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 1 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to③-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 6 & -4 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{②\to\frac{3}{2}②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & \frac{15}{2} \\ 0 & 6 & -4 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\to③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

(c) Wir bestimmen die Lösungsmenge des Gleichungssystems, indem wir das Gleichungssystem von unten nach oben auflösen.

$$5x_3 = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2} \tag{③}$$

$$6x_2 - 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 \tag{②}$$

$$x_1 - 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \tag{①}$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält genau einen Lösungsvektor und ist also

$$\text{Lös} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3. Wir erklären hier wie man die folgende Matrix durch Zeilenoperationen auf Zeilen-Stufen-Form bringt.

$$\text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Die andere Teilaufgabe wurde in der Übung besprochen.
Die Zeilen-Stufen-Form einer Matrix sowie die nötigen Zeilenoperationen sind nicht

eindeutig. Es gibt also mehrere richtige Lösungen, eine mögliche Lösung ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\to②-2①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑤\to⑤-2①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\to③-2②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④\to④+3②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{④\to④+10③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese letzte Matrix ist in Zeilen-Stufen-Form.