Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (2 Punkte, Multiple Choice)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Behauptung: "Für alle Matrizen $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ gilt $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$".
Antwort: *Falsch*, die Binomische Formel gilt für Matrizen nicht. Dies prüft man beispielsweise mit folgenden Matrizen: Es seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $(A+B)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 27 & 4 \\ 2 & 11 \end{smallmatrix}\right)$, aber $A^2 + 2AB + B^2 = \left(\begin{smallmatrix} 27 & -12 \\ 10 & 11 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Behauptung: "Es gibt eine Matrix $C \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\left(\begin{smallmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -32 \end{smallmatrix}\right) C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$."
Antwort: *Richtig*, nämlich $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{32} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Produkte A_iA_j für $i, j \in \{1,2,3\}$, sofern diese definiert sind.
Lösung: Die Produkte $A_1 \cdot A_2$, $A_2 \cdot A_2$, $A_3 \cdot A_1$ und $A_3 \cdot A_3$ sind nicht definiert.

$$A_1 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 8 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad A_1 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 13 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 11 \\ -1 & 4 & 19 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie mithilfe des Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 3 \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von der Zahl a.
Lösung: Zunächst stellt man erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringt diese mittels Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{②\to②-①}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ a & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$
$$\overset{③\to③-a①}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -3 \end{array}\right) \overset{③\to③+②}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

Achtung: Man darf nicht einfach eine Zeile durch eine Zahl teilen, wenn man nicht weiß, dass diese Zahl nicht 0 ist!
Die Nullstellen von a^2+a-2 sind 1 und -2. Wir machen also eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $a = 1$
Das Gleichungssystem wird zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat also *keine Lösung*!

Fall 2: $a = -2$
Das Gleichungssystem wird zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen. Wir lösen auf und erhalten die Lösungsmenge

$$\text{Lös}(A|b) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fall 3: $a \neq 1$ und $a \neq -2$
Hier hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, nämlich

$$\text{Lös}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3}{a-1} \\ \frac{3}{a-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 4. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und es sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Potenzen B^2, B^3, B^4, B^5 und B^6.
Lösungen:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & bcd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & abcd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich $B^5 = B^6 = 0$.