Zahlentheorie – Blatt 11

Abgabe am 4.7.2017 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) ζ_8 ist eine Nullstelle von $X^4 + 1$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{Q}(\zeta_8)$

(c) $X^4 + 1$ ist das Minimalpolynom von ζ_8.

(d) Bestimmen Sie die Norm $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\zeta_8)$ und die Spur $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\zeta_8)$. Hat für jedes n die Norm $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\zeta_n)$ bzw. die Spur $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\zeta_n)$ diesen Wert? (Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.)

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte):

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

(c) Gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$? Gilt wenigstens eine der beiden Inklusionen? Begründen Sie.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ algebraisch, mit Minimalpolynom $\mathrm{MiPo}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$.

(a) Zeigen Sie, dass α^{-1} in $\mathbb{Q}[\alpha]$ liegt, indem Sie $b_0, \dots, b_{n-1}$ angeben (in Abhängigkeit von MiPo_α), so dass $\alpha^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \alpha^i$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[\alpha]$ gilt. (Dies wurde in der Vorlesung bisher nur ohne Beweis behauptet.)
Hinweis: Um zu zeigen, dass ein β^{-1} in $\mathbb{Q}[\alpha]$ liegt, können Sie (a) auf β anwenden.

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte):

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch, mit Minimalpolynom $\mathrm{MiPo}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$ vom Grad n. Wir fassen $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auf.

(a) Sei $\beta \in K$. Prüfen Sie, dass die Multiplikation mit β eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $K \to K$ ist, d. h. die Abbildung $x \mapsto \beta \cdot x$ ist linear, wenn man K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffasst.
Anmerkung: Sie sollen sich hier vor allem überlegen, was man dazu überhaupt überprüfen muss. (Der eigentliche Beweis ist sehr leicht.)

(b) Geben Sie die Matrix M_α der Multiplikation mit α an bezüglich der $\mathbb{Q}$-Basis $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ von K.

(c) Zeigen Sie: Das charakteristische Polynom der Matrix M_α aus (b) ist genau MiPo_α. (Zur Erinnerung: Das charakteristische Poylnom ist definiert als $\det(XI_n - M_\alpha)$, wobei $I_n \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist.[1])

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZTh_SS17/

[1]Manchmal definiert man das charakteristische Poylnom auch als $\det(M_\alpha - XI_n)$. Mit dieser Definition kann erhält man: $\det(M_\alpha - XI_n) = (-1)^n \cdot \mathrm{MiPo}_\alpha$.