1	2	3	4	Σ

Zahlentheorie – Blatt 12

Abgabe am 11.7.2017 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+1 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{O}_K$ ein Zahlring und ist $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines normierten Polynoms $f \in \mathcal{O}_K[X]$, so ist α ganz-algebraisch.

(b) $\sqrt{\sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{3}}$ ist ganz-algebraisch.

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte):

(a) Sei $\beta = a_0 + a_1 5^{1/3} + a_2 5^{2/3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Drücken Sie $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}}(\beta)$ als Funktion von a_0, a_1 und a_2 aus.

(b) Sei K ein beliebiger Zahlkörper und sei $\alpha \in K$. Zeigen Sie, dass sich α auf genau eine Weise als Summe $\alpha = \beta_\alpha + r_\alpha$ schreiben lässt, für Elemente $r_\alpha \in \mathbb{Q}$ und $\beta_\alpha \in K$ mit $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\beta_\alpha) = 0$.
Hinweis: Können Sie r_α mit Hilfe von $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ definieren?

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt: Aus $\alpha \in \mathcal{O}_K$ folgt weder $r_\alpha \in \mathbb{Z}$ noch $\beta_\alpha \in \mathcal{O}_K$.

(d) Zeigen Sie: Ist $[K : \mathbb{Q}] = n$, so ist $n \cdot r_\alpha \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \mathcal{O}_K$.

Aufgabe 3 (1+1+1+2 Punkte):

Sei $d \in \mathbb{N}$, quadratfrei und ≥ 2, sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, seien $\sigma_1, \sigma_2 \colon K \to \mathbb{C}$ die beiden Einbettungen, und sei $f \colon K \to \mathbb{C}^2, \alpha \mapsto (\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha))$ (wie in Lemma 3.2.9 aus der Vorlesung).

(a) Geben Sie $f(a + b\sqrt{d})$ explizit an für $a, b \in \mathbb{Q}$. (Insbesondere sollten Sie feststellen, dass das Bild $f(K)$ in $\mathbb{R}^2$ liegt.)

(b) Skizzieren Sie $f(\mathcal{O}_K) \subseteq \mathbb{R}^2$ im Fall $d = 2$.

(c) Bestimmen Sie (im Fall $d = 2$) ein $\alpha_1 \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$, so dass $\|f(\alpha_1)\|$ minimal ist; hierbei ist $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ die Norm eines Vektors in $\mathbb{R}^2$. (Nach Lemma 3.2.9 existiert ein solches α_1.) Bestimmen Sie außerdem ein $\alpha_2 \in \mathcal{O}_K \setminus \mathbb{Z}\alpha_1$, so dass $\|f(\alpha_2)\|$ minimal ist (also $\|f(\alpha_2)\| \leq \|f(\beta)\|$ für alle $\beta \in \mathcal{O}_K \setminus \mathbb{Z}\alpha_1$).

(d) Machen Sie (b), (c) nochmal im Fall $d = 5$. (Beachten Sie Beispiel 3.2.6.)

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Ist R ein Ring (kommutativ, mit neutralem Element 1) und sind $a, b \in R$, so schreibt man „$a \mid b$“, wenn es ein $c \in R$ gibt mit $ac = b$. Außerdem definiert man: $R^\times := \{u \in R \mid \exists a \in R \colon ua = 1\}$. Zeigen Sie unter Verwendung dieser Definitionen für $a, b, c \in R$:

(a) $a \mid b \Longrightarrow a \mid bc$

(b) $a \mid b \wedge b \mid c \Longrightarrow a \mid c$

(c) $a \mid b \wedge a \mid c \Longrightarrow a \mid (b + c)$

(d) Sei R nullteilerfrei, d. h. für alle $r, s \in R \setminus \{0\}$ gelte $r \cdot s \neq 0$. Dann gilt:
$a \mid b \wedge b \mid a \iff \exists u \in R^\times : au = b$