Zahlentheorie – Blatt 13

Abgabe am 18.7.2017 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $n \geq 2$, sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{7})$ und sei $\mathcal{O}_K$ der zugehörige Zahlring. Wir wollen mit Hilfe von Satz 3.3.5 die Einheitengruppe $\mathcal{O}_K^\times$ bis auf Isomorphie bestimmen.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Eisensteinkriteriums, dass das Polynom $X^n - 7$ irreduzibel ist. (Wenn Sie dieses Kriterium nicht in der Algebra-Vorlesung kennengelernt haben, finden Sie heraus, wie das Kriterium lautet und überprüfen Sie, dass es sich auf $X^n - 7$ anwenden lässt.)

(b) Geben Sie alle Nullstellen von $X^n - 7$ an. Wie viele dieser Nullstellen liegen in $\mathbb{R}$ und wie viele in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

(c) Bestimmen Sie die Signatur von K (im Sinne von Definition 3.3.3) in Abhängigkeit von n.

(d) Laut Satz 3.3.5 ist $\mathcal{O}_K^\times \cong \boldsymbol{\mu}_K \times \mathbb{Z}^r$. Was ist $\boldsymbol{\mu}_K$ und was ist r in diesem Fall (in Abhängigkeit von n)?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}]$ der zugehörige Zahlring.

(a) Zeigen Sie, dass $\epsilon := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ eine Grundeinheit ist.
Hinweis: Satz 3.3.7 kann nützlich sein.

(b) Finden Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass ϵ^{n_0} in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ liegt.

(c) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\epsilon^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ genau dann, wenn n ein Vielfaches von n_0 ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Pellschen Gleichung $X^2 - 5Y^2 = 1$ in der Tat die Form hat, die Satz 3.3.8 behauptet, nämlich $\{(\pm 1, 0), (\pm a_1, \pm b_1), (\pm a_2, \pm b_2), (\pm a_3, \pm b_3), \dots\}$, wobei $a_{n+1} = a_n a_1 + d b_n b_1$, $b_{n+1} = a_n b_1 + a_1 b_n$; geben Sie a_1, b_1 und d explizit an. (Hat ϵ^{n_0} Norm 1 oder -1?)

Aufgabe 3 (4 Punkte):

In dieser Aufgabe soll Satz 3.3.8 bewiesen werden für $d \equiv 1 \mod 4$ (und d quadratfrei). Das einzige, was in Aufgabe 2 nicht genauso für beliebige solche d funktioniert ist die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon^{n_0} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Jetzt soll dies also gezeigt werden.

(a) Seien $\alpha_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1\sqrt{d}), \alpha_2 = \frac{1}{2}(a_2 - b_2\sqrt{d}) \in \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}\sqrt{d} + \frac{1}{2}]$ (also $a_1 \equiv b_1 \mod 2$ und $a_2 \equiv b_2 \mod 2$). Wir nehmen an, dass $a_1 \equiv a_2 \mod 4$ und $b_1 \equiv b_2 \mod 4$ ist. Zeigen Sie, dass dann $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ liegt.

(b) Zeigen Sie: Es gibt $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n \neq n'$ so dass für $\epsilon^n = \frac{1}{2}(a_1 + b_1\sqrt{d})$ und $\epsilon^{n'} = \frac{1}{2}(a_2 + b_2\sqrt{d})$ gilt: $a_1 \equiv a_2 \mod 4$ und $b_1 \equiv b_2 \mod 4$.
Hinweis: Wie viele Paare $(a \pmod 4, b \pmod 4)$ gibt es?

(c) Folgern Sie, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\epsilon^{n_0} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gibt.
Hinweis: Für a_2, b_2 wie in (b) ist $\frac{1}{2}(a_2 - b_2\sqrt{d}) = \pm\epsilon^{-n'}$.

(d) Liefert ϵ^{n_0} notwendigerweise eine Grundlösung für die Pellsche Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$? Wenn nein, wie kann man ein n_1 bestimmen, so dass ϵ^{n_1} eine Grundlösung liefert?

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Es soll gezeigt werden, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ nicht faktoriell ist:

(a) Finden Sie eine weitere Schreibweise von $6 = 2 \cdot 3$ als Produkt $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, für $\alpha_j = a_j + \sqrt{10}b_j \in \mathbb{Z}[10]$, wobei α_1, α_2 keine Einheiten sind und nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

(b) Zeigen Sie, dass α_1 und α_2 nicht zu 2 und 3 assoziiert sind.
Hinweis: Bestimmen Sie die Normen.

(c) Zeigen Sie, dass 2 und 3 irreduzibel sind.
Hinweis: Unter welchen Bedingungen an a, b, c, d liegt ein Produkt $(a + b\sqrt{10})(c + d\sqrt{10})$ überhaupt in $\mathbb{Z}$ (wenn $b \neq 0$ ist)? Unter welchen Bedingungen ist das Produkt 2 bzw. 3? Zeigen Sie, dass dies nicht sein kann, indem Sie Ihre Gleichung modulo 10 nehmen.

(d) Begründen Sie, dass aus (b) und (c) folgt, dass 6 keine eindeutige Primfaktorzerlegung hat.