Zahlentheorie – Blatt 2

Abgabe am 2.5.2017 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie (ohne Satz 1.2.6 zu verwenden; den haben wir ja nicht bewiesen), dass mindestens eine der folgenden Behauptungen wahr ist:

- Es gibt unendlich viele Primzahlen, die kongruent 3 modulo 8 sind.
- Es gibt unendlich viele Primzahlen, die kongruent 5 modulo 8 sind.

(Sie brauchen *nicht* rauszufinden, welche der Behauptungen wahr ist.)

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $F_n := 2^{2^n} + 1$ die n-te *Fermat-Zahl*.

Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 1$ gilt: $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.

(b) Für $n \geq 1$ gilt: $F_n = F_0 \cdot F_1 \cdots F_{n-1} + 2$.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, indem Sie zeigen, dass die Fermat-Zahlen paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

In der Vorlesung wurden die folgenden beiden Behauptungen nur anschaulich begründet. Geben Sie exakte Beweise an.

(a) Für $0 < x < 1$ gilt: $\log(1 - x) < -x$

(b) Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass für $0 < x < \epsilon$ gilt: $\log(1 - x) > -2x$.

Hinweis: Das einzige, was man dafür über den Logarithmus wissen muss, ist: log ist auf dem Intervall $(0, 1]$ zweimal stetig differenzierbar; $\log(1) = 0$; $\log'(1) = 1$; $\log''(x) < 0$ für $0 < x < 1$.

Noch ein Hinweis: Erinnern Sie sich an den Mittelwertsatz aus Ihrer Analysis-Vorlesung.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei p_n die n-te Primzahl. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass p_n etwa $n \log n$ ist. Genauer: Zeigen Sie (unter Verwendung des Satzes von Chebychev aus der Vorlesung):

(a) Es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle n gilt:

$$C_1 n \leq \frac{p_n}{\log p_n} \leq C_2 n.$$

(b) Es gilt: $\log p_n \sim \log n$.

(c) Es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$ so dass für alle n gilt:

$$C_1 n \log(n) \leq p_n \leq C_2 n \log(n).$$

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZTh_SS17/