Zahlentheorie – Blatt 4

Abgabe am 16.5.2017 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen f_i das kleinste j, so dass $f_i(x) = O(g_j(x))$ ist. Geben Sie (für dieses j) jeweils auch an, ob $f_i(x) = o(g_j(x))$ gilt. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

$f_1(x) = x^2 + 12x - 7$ $\qquad$ $g_1(x) = x^{-1}$

$f_2(x) = \log(x^2 + 12x - 7)$ $\qquad$ $g_2(x) = 1$

$f_3(x) = e^{x^2} + e^{12x} - e^7$ $\qquad$ $g_3(x) = \log x$

$f_4(x) = (e^x)^2 + 12e^x - 7$ $\qquad$ $g_4(x) = x$

$f_5(x) = \frac{1}{x^2+12x-7}$ $\qquad$ $g_5(x) = x^2$

$f_6(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\qquad$ $g_6(x) = e^x$

$f_7(x) = \log(\log(x))$ $\qquad$ $g_7(x) = e^{2x}$

$f_8(x) = \sqrt{x^2 + 12x - 7}$ $\qquad$ $g_8(x) = e^{e^x}$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $x > 0$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Setzen Sie in ein Kästchen 0, in ein Kästchen x, in ein Kästchen $x + 1$ und in ein Kästchen $|f(\lfloor x \rfloor)|$ ein, so dass alle Behauptungen richtig werden, und begründen Sie die Behauptungen.

(a) $\sum_{n \le \square} f(n) \ge \int_0^x f(z)\,dz$ falls f monoton steigend und $f(x) \ge 0$ ist.

(b) $\left|\sum_{n \le x} f(n-1) - \int_0^x f(\lfloor z \rfloor)\,dz\right| \le \square$.

(c) $\int_0^x f(z)\,dz \le \int_0^x \lfloor f(z) \rfloor\,dz + \square$

(d) $|\int_0^x f(z)\,dz| \le \int_0^x |f(z)|\,dz + \square$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es ein $0 < \gamma < 1$ gibt, so dass gilt: $\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + O(\frac{1}{x})$. In dem Beweis wurde

$$a_n := \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{z}\,dz$$

definiert, und es wurde eine anschauliche Begründung dafür gegeben, dass $\sum_{n \ge M} a_n \le \frac{1}{M}$ ist. Diese Begründung soll in dieser Aufgabe formaler aufgeschrieben werden:

(a) Zeigen Sie: $a_n \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
Hinweis: Sie können z. B. die Fläche zwischen dem Graphen von $\frac{1}{z}$ und der Geraden bei $y = \frac{1}{n}$ als Integral einer Funktion $g(z)$ ausdrücken.

(b) Zeigen Sie: $\sum_{n \ge M} a_n \le \frac{1}{M}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass es ein $\gamma' \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt: $\sum_{n \le x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + \gamma' + O(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

Hinweis: Sie können ähnlich vorgehen wie beim entsprechenden Beweis für $\sum_{n \le x} \frac{1}{n}$ aus der Vorlesung.