1	2	3	4	Σ

Zahlentheorie – Blatt 5

Abgabe am 23.5.2017 bis 10:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zur Erinnerung:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^r \text{ für ein } r \\ 0 & \text{falls } n \text{ keine Primpotenz ist.} \end{cases}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{falls } n = p_1 \cdots p_r \text{ für lauter verschiedene Primzahlen } p_i \\ 0 & \text{falls } n \text{ quadrathaltig ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\log * \mu = \Lambda$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Betrachten Sie die Dirichlet-Reihe $F(s) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n^s}$.

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzabszisse von F.

(b) Für welche $s \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe absolut?

Aufgabe 3 (3+1+2+1 Punkte):

Eine zahlentheoretische Funktion f heißt *multiplikativ* wenn $f(1) = 1$ ist und für alle teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$. (Nicht zu verwechseln mit „vollständig multiplikativ", wo m, n nicht teilerfremd sein müssen.)

(a) Zeigen Sie: Sind f, g multiplikativ, so sind auch $f * g$ multiplikativ, und das Faltungsinverse von f ist auch multiplikativ.

(b) Welche der zahlentheoretischen Funktionen 1, id, ϵ, μ, d, ϕ, log, Λ sind multiplikativ?

(c) Zeigen Sie: Ist f multiplikativ und ist $s \in \mathbb{C}$ so, dass die Dirichlet-Reihe $F(s) := \sum_n \frac{f(n)}{n^s}$ absolut konvergiert, so gilt $F(s) = \prod_p F_p(s)$, wobei $F_p(s) := \sum_r \frac{f(p^r)}{p^{rs}}$.

(d) Zeigen Sie: Ist f sogar vollständig multiplikativ, so gilt außerdem $F_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}f(p)}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Zeigen Sie: $\sum_{n \le x} \log n = x(\log x - 1) + O(\log x)$, unter Verwendung der (vereinfachten) abelschen Summenformel.