Zahlentheorie – Blatt 6

Abgabe am 30.5.2017 bis 10:30 Uhr

1	2	3	4	Σ

....
Name und Matr-Nr.

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie mit Hilfe des Primzahlsatzes: Ist p_n die n-te Primzahl, so gilt: $p_n \sim n \log n$.

Hinweis: Sie können analog zu Aufgabe 4 von Blatt 2 vorgehen und evtl. auch Teile davon verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Sei $\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p$. Zeigen Sie: $\theta(x) \sim x$.
Hinweis: Verwenden Sie den Primzahlsatz. Sie können auch Ideen aus dem Beweis von Satz 1.7.2 aus der Vorlesung verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt aller Primzahlen kleiner gleich x etwa gleich e^x ist, wobei mit „etwa“ das Folgende gemeint ist: Für feste $a > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\prod_{p\leq x} p}{a^x} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a > e \\ \infty & \text{falls } a < e. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe (a).

Aufgabe 3 (2+1 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{C}}$ eine Folge, die gegen 0 konvergiert, so konvergieren auch die Mittelwerte gegen 0, d. h.:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n = 0$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Idee aus dem Beweis von Lemma 1.7.4 aus der Vorlesung.

(b) Es gilt $\sum_{n\leq x} \frac{1}{\log n} = o(x)$.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).

Aufgabe 4 (2+1+1+1+2 Punkte):

Man definiert

$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Aus der riemannschen Vermutung folgt, dass $\mathrm{li}(x)$ eine noch bessere Approximation an $\pi(x)$ ist als $\frac{x}{\log x}$. Insbesondere sollte also $\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$ gelten. Dies soll in dieser Aufgabe gezeigt werden. Genauer:

(a) Die Beweisidee besteht darin, die Fläche unter dem Graph von $\frac{1}{\log t}$ in drei Stücke zu teilen: Das erste Stück ist ein Rechteck R_1, das über die ganze Breite geht und so hoch ist, das es gerade noch unterhalb des Graphs liegt. Der Rest wird nochmal unterteilt in ein Stück mit $t \leq u(x)$ und ein Stück mit $t \geq u(x)$, für eine noch geeignet zu wählende Funktion $u(x)$. Die Fläche dieser beiden Stücke wird dann nach oben durch die Fläche der kleinsten Rechtecke, die diese Stücke enthalten, abgeschätzt. Wir bezeichnen diese beiden Rechtecke mit R_2 (links von $u(x)$) und R_3 (rechts von $u(x)$).
Skizzieren Sie all dies (die drei Stücke und die drei Rechtecke) und geben Sie die Breiten b_i und Höhen h_i der Rechtecke als Funktionen von x und $u(x)$ an.

(b) Zeigen Sie: $b_1(x) \cdot h_1(x) = \frac{x}{\log x} + O(1)$.

(c) Unter welchen Bedingungen an $u(x)$ gilt $b_2(x) \cdot h_2(x) = o(\frac{x}{\log x})$?

(d) Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung $b_3(x) \sim x$ ist. Welche Abschätzung muss also $h_3(x)$ erfüllen, damit $b_3(x) \cdot h_3(x) = o(\frac{x}{\log x})$ gilt?

(e) Geben Sie eine Funktion $u(x)$ an, so dass die beiden Bedingungen aus (c) und (d) erfüllt sind.
Hinweis: Da die Bedingung aus (c) leichter zu prüfen ist, ist es am einfachsten, $u(x)$ so zu wählen, dass diese Bedingung nur sehr knapp erfüllt ist und dann zu prüfen, ob die Bedingung aus (d) auch erfüllt ist.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZTh_SS17/