Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Zahlentheorie II – Blatt 1

Abgabe der Lösungen am 15.04.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 1.1 bis 1.6 sind Präsenzaufgaben für die erste Übungsstunde am 08.04.2025. Bitte bereiten Sie schriftliche Lösungen zu den letzten beiden Aufgaben 1.7 und 1.8 bis zur Übungsstunde am 15.04.2025 vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 1.1

Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf einem Körper K, und sei $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varrho \leq 1$. Zeigen Sie, daß auch $|\cdot|^\varrho \colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \mapsto |a|^\varrho$ ein Absolutbetrag auf K ist.

Aufgabe 1.2

Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf einem Körper K. Zeigen Sie, daß die Verküpfungen $+, \cdot$ sowie die additive und die multiplikative Inversenabbildung stetige Abbildungen von $K \times K$ bzw. K bzw. $K \smallsetminus \{0\}$ nach K bilden.

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie: Die verschiedenen Einbettungen von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nach $\mathbb{C}$, gefolgt von dem gewöhnlichen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$, liefern wesentlich verschiedene, d. h. nicht zueinander äquivalente, Absolutbeträge auf K.

Aufgabe 1.4

Geben Sie einen unendlichen Körper an, auf dem neben dem trivialen Absolutbetrag keine weiteren Absolutbeträge existieren.

Aufgabe 1.5

Sei $p \in \mathbb{P}$, eine Primzahl. Zeigen Sie: Die p-adische Topologie auf $\mathbb{Q}$ ist nicht diskret, aber total unzusammenhängend.

Erinnerung. Ein topologischer Raum X ist *diskret*, falls jede Teilmenge von X offen ist. Der Raum X heißt *total unzusammenhängend*, falls jede seiner Zusammenhangskomponenten einelementig ist.

Aufgabe 1.6

Zeigen Sie detailreicher als in der Vorlesung: Sind $|\cdot|, |\cdot|'$ Absolutbeträge auf einem Körper K dergestalt, daß jede Nullfolge in K bzgl. $|\cdot|$ auch eine Nullfolge bzgl. $|\cdot|'$ ist und umgekehrt, so induzieren $|\cdot|$ und $|\cdot|'$ dieselbe Topologie auf K.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.7 (4 Punkte)

Sei $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über einem Körper k, und sei $\pi \in k[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom über k. Definieren Sie analog zur p-adischen Bewertung und zum p-Betrag auf $\mathbb{Q}$ eine π-adische Bewertung v_π auf K und einen (bis auf Äquivalenz eindeutig) zugehörigen Absolutbetrag $|\cdot|_\pi$. Verifizieren Sie kurz die jeweiligen Axiome sowie die Eigenschaft, daß die Einschränkung von $|\cdot|_\pi$ auf k den trivialen Absolutbetrag liefert.

Hinweis. Für den Übergang von v_π zu $|\cdot|_\pi$ müssen Sie eine im allgemeinen willkürliche Wahl für $|\pi|_\pi \in (0,1)_\mathbb{R}$ treffen. Ist k endlich, so wird üblicherweise $|\pi|_\pi = |k|^{-\mathrm{grad}(\pi)}$ gesetzt.

Aufgabe 1.8 (4 Punkte)

Sei $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über einem Körper k. Der Grad einer rationalen Funktion $f = g/h$, mit $g, h \in k[X]$ und $h \neq 0$, ist durch $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(g) - \mathrm{grad}(h)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Durch $v_\infty(f) =_{\mathrm{def}} -\mathrm{grad}(f)$ ist eine Bewertung auf K gegeben, die analog zur p-adischen Bewertung auf $\mathbb{Q}$ einen (bis auf Äquivalenz eindeutig) zugehörigen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ liefert, dessen Einschränkung auf k den trivialen Absolutbetrag darstellt.

(b) Zeigen Sie weiter: Der Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ ist zu keinem der Absolutbeträge $|\cdot|_\pi$ aus Aufgabe 1.7 äquivalent.

Hinweis. Für den Übergang von v_∞ zu $|\cdot|_\infty$ müssen Sie eine im allgemeinen willkürliche Wahl für $|X^{-1}|_\infty \in (0,1)_\mathbb{R}$ treffen. Ist k endlich, so wird üblicherweise $|X^{-1}|_\infty = |k|^{-1}$ gesetzt.