Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 2

Abgabe der Lösungen am 22.04.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 2.3 und 2.4 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 2.1

Sei $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf einem Körper K. Begründen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung.

(a) Der zugehörige *Bewertungsring* $R = \{a \in K \mid |a| \leq 1\}$ ist ein Teilring von K.

(b) Für $a \in K \smallsetminus \{0\}$ gilt stets: $a \in R$ oder $a^{-1} \in R$; somit ist K der Quotientenkörper von R.

(c) Der Ring R ist lokal, mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} = \{a \in K \mid |a| < 1\}$, dem sogenannten *Bewertungsideal*, und der Einheitengruppe $R^\times = R \smallsetminus \mathfrak{p} = \{a \in K \mid |a| = 1\}$.

(d) Für alle $a, b \in R$ gilt: a teilt b in R genau dann, wenn $|a| \geq |b|$ gilt.

Was passiert in dem Sonderfall, wenn $|\cdot|$ der triviale Absolutbetrag ist?

Aufgabe 2.2

Begründen Sie für $a \in \mathbb{Q}^\times$ die Produktformel

$$\prod_{p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}} |a|_p = 1.$$

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, und seien $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_m$ paarweise nicht äquivalente Absolutbeträge auf einem Körper K, von denen zudem keiner der triviale Betrag sei.

(a) Zeigen Sie per Induktion nach m, daß es ein $a \in K$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$|a|_1 > 1 \qquad \text{und} \qquad |a|_i < 1 \quad \text{für } 2 \leq i \leq m.$$

Hinweis. Der Induktionsanfang wurde in der Vorlesung erledigt. Für $m \geq 3$ sei $b \in K$ nach Induktionsvoraussetzung mit $|b|_1 > 1$ und $|b|_i < 1$ für $2 \leq i \leq m-1$ gegeben. Beschaffen Sie sich ein $c \in K$ mit $|c|_1 > 1$ und $|c|_m < 1$. Betrachten Sie nun jeweils geeignet entweder $a = b^k c$ oder $a = b^k c (1 + b^k)^{-1}$ für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie: Hat $a \in K$ die in (a) beschriebenen Eigenschaften, so konvergiert die Folge $\left(a^n (1 + a^n)^{-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. $|\cdot|_1$ gegen 1 und bzgl. der übrigen Beträge $|\cdot|_i$ jeweils gegen 0.

(c) Folgern Sie: Sind $x_1, \ldots, x_m \in K$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig vorgegeben, so existiert stets ein Element $y \in K$ mit $|y - x_i|_i < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq m$.

Hinweis. Verwenden Sie (b).

Bemerkung. Aussage (c) ist in der Literatur als „schwacher Approximationssatz von Artin und Whaples“ bekannt.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei $K = k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über einem Körper k. Bestimmen Sie – analog zu dem in der Vorlesung behandelten Satz von Ostrowski – alle Absolutbeträge auf K, deren Einschränkung auf k trivial ist. Zeigen Sie dazu für die aus den Aufgaben 1.7 und 1.8 bekannten Absolutbeträge $|\cdot|_\pi$, parametrisiert durch normierte, irreduzible Polynome $\pi \in k[X]$, und $|\cdot|_\infty$ folgendes:

(a) Die Absolutbeträge $|\cdot|_\pi$ sind paarweise nicht äquivalent.

Bemerkung. In Aufgabe 1.8 wurde bereits gezeigt, daß $|\cdot|_\infty$ zu keinem der Beträge $|\cdot|_\pi$ äquivalent ist.

(b) Jeder nicht-triviale Absolutbetrag auf K, dessen Einschränkung auf den Koeffizientenkörper k den trivialen Absolutbetrag liefert, ist äquivalent zu einem der bereits bekannten Absolutbeträge $|\cdot|_\pi$ und $|\cdot|_\infty$.

Hinweis. Überlegen Sie sich zunächst: Jeder der zu klassifizierenden Absolutbeträge $|\cdot|$ ist nicht-archimedisch. Zudem gilt entweder $|X| \leq 1$, so daß $k[X]$ im Bewertungsring R von K bzgl. $|\cdot|$ enthalten ist, oder es ist $|X| > 1$, so daß $k[X^{-1}] \subseteq R$ gilt. Im ersten Fall finden Sie ein normiertes Polynom π von kleinst möglichem Grad mit $|\pi| < 1$ und zeigen dann $|\cdot| \sim |\cdot|_\pi$. Im zweiten Fall zeigen Sie $|\cdot| \sim |\cdot|_\infty$. Nutzen Sie dabei, daß K jeweils der Quotientenkörper von $k[X]$ bzw. $k[X^{-1}]$ ist.