Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 3

Abgabe der Lösungen am 29.04.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 3.1 und 3.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K, also R ein Unterring des Körpers K mit $1 \in R$ und $K = \{a/b \mid a, b \in R \text{ mit } b \neq 0\}$. Sei $|\cdot|_1 \colon R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften

$$|a|_1 = 0 \leftrightarrow a = 0, \quad |ab|_1 = |a|_1 |b|_1 \quad \text{und} \quad |a+b|_1 \leq |a|_1 + |b|_1 \qquad \text{für alle } a, b \in R.$$

(a) Zeigen Sie, daß sich $|\cdot|_1$ eindeutig zu einem Absolutbetrag $|\cdot|$ auf K fortsetzen läßt.

(b) Zeigen Sie: Erfüllt $|\cdot|_1$ zusätzlich $\forall a, b \in R : |a+b|_1 \leq \max\{|a|_1, |b|_1\}$, so ist die Fortsetzung $|\cdot|$ auf K nicht-archimedisch.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei K ein bewerteter Körper, bzgl. des nicht-archimedischen Absolutbetrags $|\cdot|$. Sei

$$\|f\| = \max\{|f_i| \mid 0 \leq i \leq d\} \text{ für } f = \textstyle\sum_{i=0}^d f_i X^i \text{ vom Grad } d = \operatorname{grad}(f) \geq 0, \quad \text{und} \quad \|0\| = 0.$$

(a) Zeigen Sie: $\|\cdot\|$ ist eine Fortsetzung von $|\cdot|$ und setzt sich seinerseits eindeutig zu einem Absolutbetrag auf dem rationalen Funktionenkörper $K(X)$ fort.

Hinweis. Es bietet sich an, die Aufgabe 3.1 zu nutzen.

(b) Folgern Sie: Insbesondere gibt es auf $\mathbb{Q}(X)$ diverse Absolutbeträge, die nicht äquivalent zu den in Aufgabe 2.4 besprochenen Absolutbeträgen sind.

Aufgabe 3.3

Ein *allgemeiner Bewertungsring* ist ein Integritätsbereich R, für dessen Quotientenkörper K gilt: $\forall a \in K \smallsetminus \{0\} : \ a \in R \ \vee \ a^{-1} \in R$. Als Teilring von K betrachtet, heißt solch ein Ring R auch kurz ein (allgemeiner) *Bewertungsring* von K.

(a) Ist R ein allgemeiner Bewertungsring, so erhält $\Gamma = K^\times / R^\times$ die Struktur einer abelschen Gruppe, welche additiv (!) geschriebenen wird. Zeigen Sie: Durch die Festlegung

$$\alpha \leq \beta \ \leftrightarrow_{\text{def}} \quad a^{-1} b \in R \qquad \text{für } \alpha = aR^\times,\ \beta = bR^\times \text{ in } \Gamma$$

erhält Γ die Struktur einer geordneten abelschen Gruppe, d. h., Γ ist mittels $\leq$ total geordnet und es gilt $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma : \ \alpha \leq \beta \ \leftrightarrow \ \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(b) Sei R ein allgemeiner Bewertungsring und Γ, inklusive $\leq$, wie in (a) definiert. Zusätzlich sei $v \colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ gegeben durch: $v(a) = aR^\times \in \Gamma$ für $a \in K^\times$ und $v(0) = \infty$.
Zeigen Sie: Abgesehen davon, daß Γ im allgemeinen sich nicht als geordnete Untergruppe in die additive Gruppe $\mathbb{R}_+$ einbetten läßt, erfüllt v alle definierenden Eigenschaften, die eine reelle (Exponenten-)Bewertung ausmachen.

(c) Bestimme Sie alle (allgemeinen) Bewertungsringe von $\mathbb{Q}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4

Es sei $k(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über einem endlichen Körper k. Aus Aufgabe 2.4 ist bekannt, daß die Absolutbeträge von $k(X)$ bis auf Äquivalenz durch

$$P = \{\pi \mid \pi \in k[X] \text{ normiert und irreduzibel}\} \cup \{\infty\}$$

parametrisiert werden.
Begründen Sie: Für $a \in k(X)$ gilt die Produktformel

$$\prod_{\pi \in P} |a|_\pi = 1,$$

sofern die Absolutbeträge $|\cdot|_\pi$ wie in den Aufgaben 1.7 und 1.8 angegeben normiert werden.