Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 4

Abgabe der Lösungen am 06.05.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 4.1 und 4.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, ausgestattet mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$ und vollständig bzgl. desselben. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K.
Zeigen bzw. erläutern Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist $|\cdot|$-konvergent in K.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine $|\cdot|$-Nullfolge.

Folgern Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent mit Grenzwert α in K, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n\sigma}$ für jede Permutation $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergent und liefert denselben Grenzwert α.

Bemerkung. Die Summationsreihenfolge darf im nicht-archimedischen Kontext also – anders als in der reellen Analysis – stets sorglos nach Belieben variiert werden.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei $R = k[[X]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid a_n \in k \text{ für } n \in \mathbb{N}\}$ der Ring der formalen Potenzreihen über einem Körper k, und sei $|\cdot|\colon R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$|0| = 0 \qquad \text{und} \qquad \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right| = 2^{-m} \quad \text{falls } m = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq 0\} < \infty.$$

(a) Erläutern bzw. zeigen Sie: Der Ring R ist ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper

$$K = k((X)) = R[X^{-1}] = \left\{\sum_{n=m}^{\infty} a_n X^n \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } a_n \in k \text{ für } n \in \mathbb{Z}_{\geq m}\right\},$$

dem *Körper der Laurentreihen* über k, und $|\cdot|$ setzt sich zu einem nicht-archimedischen Absolutbetrag auf K fort.

Hinweis. Beobachten Sie, daß R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $Xk[[X]]$ ist, und nutzen Sie Aufgabe 3.1.

(b) Zeigen Sie: $K = k((X))$ ist vollständig bzgl. des Absolutbetrages $|\cdot|$.

(c) Zeigen Sie: Der rationale Funktionenkörper $k(X)$ ist ein Teilkörper von $K = k((X))$, und K ist die vollständige Hülle von $k(X)$ bzgl. des in Aufgabe 1.7 mit $|\cdot|_\pi$ bezeichneten Absolutbetrags für $\pi = X$ mit der Normierung $|X|_\pi = 2^{-1}$.

Bemerkung. Ist k endlich, so ist – wie schon an anderer Stelle vermerkt – die passendere Normierung oft $|X| = q^{-1}$ für $q = |k|$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.3

Sei p eine Primzahl und $S = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Wie in der Vorlesung eingeführt, bezeichne $\mathbb{Q}_p$ den Körper der p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p$ den Ring der ganzen p-adischen Zahlen.

(a) Erläutern Sie: Das Bewertungsideal von $\mathbb{Z}_p$ ist das Hauptideal $p\mathbb{Z}_p$, und S ist ein vollständiges und irredundantes Vertretersystem für $\mathbb{Z}_p$ modulo $p\mathbb{Z}_p$.

(b) Zeigen Sie: Jedes $a \in \mathbb{Z}_p$ besitzt genau eine Darstellung als Reihe der Form

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \quad \text{mit } a_n \in S \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter ist, für $a \neq 0$, dann $|a|_p = p^{-m}$ mit $m = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq 0\}$.

Hinweis. Nutzen Sie Aufgabe 4.1 und die Aussage in (a).

(c) Zeigen Sie: Jedes $a \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ besitzt genau eine Darstellung als

$$a = \sum_{n=m}^{\infty} a_n p^n \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z},\ a_n \in S \text{ für } n \in \mathbb{Z}_{\geq m} \text{ und } a_m \neq 0.$$

Weiter ist dann $|a|_p = p^{-m}$.

Hinweis. Erläutern und nutzen Sie anschließend, daß sich jedes $a \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ eindeutig als $a = p^m b$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ schreiben läßt.

Aufgabe 4.4

Sei p eine Primzahl, und sei $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen.

(a) Verifizieren Sie: $\sum_{n=0}^{\infty}(p-1)p^n = -1$ in $\mathbb{Q}_p$.

(b) Erläutern Sie: $\mathbb{N}$ liegt topologisch dicht in dem Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p-adischen Zahlen.

(c) Zeigen Sie: -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{Q}_p$ genau dann, wenn $p \equiv_4 1$ ist.

Hinweis. Überlegen Sie sich zunächst, daß eine Quadratwurzel von -1 jedenfalls in $\mathbb{Z}_p$ liegen müßte und daß die Bedingung $p \equiv_4 1$ zumindest notwendig ist. Schreiben Sie, als Ansatz für $p \equiv_4 1$, den Kandidaten für die gesuchte Quadratwurzel dann in der aus Aufgabe 4.3 bekannten kanonischen Form mit p-adischen Ziffern a_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Überlegen Sie, wie a_0 zu wählen ist, und entwickeln Sie dann ein rekursives Verfahren, mit dem a_1, a_2, …dergestalt bestimmt werden können, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n\right)^2 \equiv_{p^{n+1}} -1.$$