Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Zahlentheorie II – Blatt 5

Abgabe der Lösungen am 13.05.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 5.2 und 5.4 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 5.1

Sei $p \in \mathbb{P}$, und sei $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ eine ganze p-adische Zahl mit Koeffizienten $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Zeigen Sie: a liegt genau dann in $\{-1, -2, -3, \ldots\}$, wenn für fast alle $n \geq 0$ gilt $a_n = p - 1$.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{P}$, und $a \in \mathbb{Q}_p^*$ mit p-adischer Entwicklung

$$a = \sum_{n=m}^{\infty} a_n p^n, \qquad \text{für } m = v_p(a) \text{ und geeignete } a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Zeigen Sie: a ist genau dann rational, also $a \in \mathbb{Q}$, wenn die Ziffernfolge $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ ab einem gewissen Punkt periodisch verläuft.

Hinweis. Es bezeichne $Q \subseteq \mathbb{Q}_p$ die Menge aller p-adischen Zahlen, deren p-adische Entwicklung schließlich periodisch verläuft. Zeigen Sie zunächst $Q \subseteq \mathbb{Q}$. Überlegen Sie sich dann, wieso $Q + \mathbb{Z} \subseteq Q$ gilt und daß es daher genügt, zu zeigen: Ist $a = -b/c$ mit $b, c \in \mathbb{N}$ und $b < c$, so gilt $a \in Q$. Hierfür nutzen Sie die Kongruenz $p^r \equiv_c 1$, für geeignetes $r \in \mathbb{N}$, um $(p^r - 1)b = c(db)$ für geeignetes $d \in \mathbb{N}$ zu schreiben.

Aufgabe 5.3

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und $f = \sum_{i=0}^{d} f_i X^i \in R[X]$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f^{((n))} = \binom{n}{0} f_n + \binom{n+1}{1} f_{n+1} X^1 + \binom{n+2}{2} f_{n+2} X^2 + \binom{n+3}{3} f_{n+3} X^3 + \ldots$$

Zeigen Sie: Für jedes $b \in R$ gilt

$$f(b + X) = f^{((0))}(b) + f^{((1))}(b) X^1 + f^{((2))}(b) X^2 + \ldots \tag{$*$}$$

Sei nun R der Bewertungsring eines vollständig nicht-archimedisch bewerteten Körpers und $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i X^i \in R[[X]]$ sowie $b \in R$ mit $|b| < 1$. Zeigen Sie, daß $(*)$ dieser Situation entsprechend ebenso gilt.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p > 2$. Verwenden Sie das Henselsche Lemma, um zu zeigen, daß es in $\mathbb{Z}_p$ eine primitive $(p-1)$-te Einheitswurzel ω gibt. Zeigen Sie weiter: Jedes $u \in \mathbb{Z}_p^*$ läßt sich eindeutig als Produkt $u = \omega^i(1 + pa)$ einer ω-Potenz und einer „Einseinheit“ $1 + pa \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ schreiben. Folgern Sie; Jedes $u \in \mathbb{Q}_p^*$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$u = z_m p^m + z_{m+1} p^{m+1} + \ldots, \qquad \text{für geeignete } z_n \in \{0\} \cup \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-2}\},$$

wobei $m = v_p(x)$ und $z_m \neq 0$ sind.