Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 6

Abgabe der Lösungen am 20.05.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 6.2 und 6.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 6.1

Seien $p, q \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$ mit $p \neq q$. Zeigen Sie, daß sich weder $\mathbb{Q}_p$ als Teilkörper in $\mathbb{Q}_q$ noch $\mathbb{Q}_q$ als Teilkörper in $\mathbb{Q}_p$ einbetten läßt, wobei wie üblich $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ gesetzt wird.

Bemerkung: Unter Verwendung des Auswahlaxioms läßt sich zeigen, daß es stets Körpereinbettungen von $\mathbb{Q}_p$ nach $\mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Verifizieren Sie das folgende *Krasnersche Lemma*. Sei K ein vollständiger Bewertungskörper bzgl. eines nicht-archimedischen Betrages $|\cdot|$, und sei C ein algebraischer Abschluß von K, auf den sich, wie in der Vorlesung besprochen, $|\cdot|$ eindeutig fortsetzt. Das Minimalpolynom $f = \mathrm{Minpol}_K(a)$ von $a \in C$ sei separabel und zerlege sich über C als

$$f = \prod_{i=1}^n (X - a_i) \text{ mit } n \text{ verschiedenen Nullstellen } a = a_1, a_2, \ldots, a_n \in C.$$

Ist dann $b \in C$ mit $|b - a| < |a_i - a|$ für $2 \le i \le n$, so gilt stets $K(a) \le K(b)$.

Hinweis. Überlegen Sie sich: Andernfalls gäbe es einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}(C \,|\, K)$ mit $a^\sigma \neq a$, aber $b^\sigma = b$. Nutzen Sie sodann σ, um einen Widerspruch herzuleiten!

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Sei K ein vollständiger Bewertungskörper bzgl. eines nicht-archimedischen Betrages $|\cdot|$, und sei C ein algebraischer Abschluß von K. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm auf dem Raum $\{g \in K[X] \mid \mathrm{grad}(g) \le n\}$ bzgl. der K-Basis $1, X, \ldots, X^n$ sowie $|\cdot|$. Weiter sei $f \in K[X]$ normiert, irreduzibel sowie separabel, und es gelte $\mathrm{grad}(f) = n$.

Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft: Ist $g \in K[X]$ normiert mit $\mathrm{grad}(g) = n$ und $\|g - f\| < \varepsilon$, so ist g irreduzibel über K und zu jeder Nullstelle $a \in C$ von f gibt es eine Nullstelle $b \in C$ von g mit $K(a) = K(b)$.

Hinweis. Finden Sie für geeignetes ε zu einer gegebenen Nullstelle b von g zunächst eine Nullstelle a von f mit $K(a) = K(b)$. Leiten Sie hierzu für $\|g - f\| < \varepsilon \le 1$ die Abschätzung $|f(b)| = |g(b) - f(b)| < \varepsilon \|g\|^n = \varepsilon \|f\|^n$ her, um dann das Krasnersche Lemma aus Aufgabe 6.2 zu verwenden.

Aufgabe 6.4

Sei $\Gamma \neq \{0\}$ eine additive Untergruppe der lokalkompakten abelschen Gruppe $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen paarweise äquivalent sind:

(i) Γ is diskret. (ii) Γ besitzt keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$. (iii) Γ enthält ein kleinstes positives Element. (iv) Γ ist eine unendliche zyklische Gruppe, genauer $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma$ für ein Element $\gamma > 0$. (v) Γ ist (topologisch) abgeschlossen in $\mathbb{R}$, aber nicht gleich $\mathbb{R}$.