Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Zahlentheorie II – Blatt 7

Abgabe der Lösungen am 27.05.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgabe 7.2 ist schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 7.1

Sei R ein diskreter Bewertungsring im algebraischen Sinne, also ein Hauptidealring mit genau einem von $\{0\}$ verschiedenen Primideal $\mathfrak{p}$, und K sein Quotientenkörper.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau eine normierte diskrete Bewertungsabbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ dergestalt, daß R der Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ das Bewertungsideal bzgl. v sind.

(b) Zeigen Sie: R ist ganz-abgeschlossen, also gleich seiner ganzen Hülle in K.

Bemerkung: Umgekehrt läßt sich zeigen: Jeder noethersche, ganz-abgeschlossene Integritätsbereich mit genau einem von $\{0\}$ verschiedenen Primideal ist ein diskreter Bewertungsring im algebraischen Sinne.

Aufgabe 7.2 (8 Punkte)

Der Körper K sei mit einem diskreten (insb. nicht-archimedischen) Absolutbetrag $|\cdot|$ und der zugehörigen normierten Exponentenbewertung v ausgestattet.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $g = \sum_{i=0}^{n} g_i X^i \in K[X]$ ein normiertes *Eisensteinpolynom*, d. h., es gelten: $v(g_0) = 1$, $v(g_i) \geq 1$ für $1 < i < n$, und $g_n = 1$. Prüfen Sie, daß g irreduzibel über K ist, und zeigen Sie weiter: Ist $L = K(\Pi)$ ein Erweiterungskörper mit $g(\Pi) = 0$, so hat $|\cdot|$ genau eine Fortsetzung zu einem (diskreten) Betrag auf L, die Erweiterung $L\,|\,K$ ist *rein verzweigt*, d. h. $e(L\,|\,K) = [L : K]$, und Π ist ein uniformisierendes Element für L.

Hinweis. Nutzen Sie u. a. die aus der Vorlesung bekannte Ungleichung $n \geq \sum_{i=1}^{r} e_i f_i$, für den Erweiterungsgrad $n = [L : K]$ sowie die Verzweigungsindizes e_i und Restklassengrade f_i von $L\,|\,K$ bzgl. der verschiedenen Fortsetzungen $|\cdot|_1, \ldots, |\cdot|_r$ von $|\cdot|$ auf L.

(b) Sei umgekehrt $L\,|\,K$ eine endliche Körpererweiterung, die rein verzeigt ist bzgl. einer gegebenen Fortsetzung von $|\cdot|$ zu einem (diskreten) Betrag auf L, und sei Π ein uniformisierendes Element für L. Zeigen Sie: Dann ist $L = K(\Pi)$ und das Minimalpolynom von Π über K ist ein normiertes Eisensteinpolynom.

Hinweis. Überlegen Sie sich, daß $g = \mathrm{Minpol}_K(\Pi)$ auch über der Vervollständigung $\widehat{K}$ irreduzibel ist, um dann zu folgern, daß g ein Eisensteinpolynom ist.

(c) Sei p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie konkret die Erweiterung $\mathbb{Q}_p(z)\,|\,\mathbb{Q}_p$ für eine primitive p^mte Einheitswurzel z. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}_p(z)\,|\,\mathbb{Q}_p$ ist rein verzweigt vom Grad $[\mathbb{Q}_p(z) : \mathbb{Q}_p] = (p-1)p^{m-1}$, und $\pi = z - 1$ ist ein uniformisierendes Element für $\mathbb{Q}_p(z)$.

Hinweis. Bestimmen Sie $\mathrm{Minpol}_{\mathbb{Q}_p}(\pi)$ und wenden Sie (a) an.

(d) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: $\mathbb{Q}_p(\sqrt[p-1]{-p})$ ist der $p$te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}_p$, also gleich $\mathbb{Q}_p(z)$ für eine primitive $p$te Einheitswurzel.

Hinweis. Sei $\pi = z-1$, und überlegen Sie: $-p = -\prod_{i=1}^{p-1}(1-z^i) \equiv -(1-z)^{p-1}(p-1)! \equiv (1-z)^{p-1}$ modulo $p\pi\mathbb{Z}_p[z]$, also $-p = (1-z)^{p-1}(1+\pi a)$ mit $a \in \mathbb{Z}_p[z]$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Sei $L\,|\,K$ eine endliche galoissche Körpererweiterung und $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf L. Weiter sei K (und damit auch L) vollständig bzgl. $|\cdot|$.

(a) Zeigen Sie: Die zugehörige Restklassenkörpererweiterung $\ell\,|\,k$ ist ebenfalls galoissch, und folglich existiert ein kanonischer Homomorphismus $\mathrm{Gal}(L\,|\,K) \to \mathrm{Gal}(\ell\,|\,k)$, $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$.

Bezeichnung. Der Kern dieses Homomorphismus heißt die *Trägheitsgruppe* von $L\,|\,K$, und der zugehörige Fixkörper T heißt der *Trägheitskörper* von $L\,|\,K$.

(b) Zeigen Sie: Der Trägheitskörper T von $L\,|\,K$ liefert die maximale unverzweigte Teilerweiterung $T\,|\,K$, und der Homomorphismus in (a) ist surjektiv.