Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Zahlentheorie II – Blatt 8

Abgabe der Lösungen am 03.06.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 8.1 und 8.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{P}$. Fertigen Sie eine vollständige Liste der quadratischen Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$ innerhalb eines festen algebraischen Abschlusses an. Ermitteln Sie für jede Erweiterung den Verzweigungsindex und den Restklassengrad.

Hinweis. In Abschnitt 2 der Vorlesung wurde für die multiplikative Gruppe $\mathbb{Q}_p^*$ bereits die Untergruppe der Quadrate bestimmt.

(b) Sei K ein nicht-archimedischer lokaler Körper der Charakteristik 0, und sei C ein algebraischer Abschluß von K. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es innerhalb von C nur endlich viele Erweiterungskörper L von K mit $[L : K] = n$.

Hinweis. Reduzieren Sie die Aufgabe zunächst darauf, daß es jeweils nur endlich viele rein verzweigte Erweiterungen zu vorgegebenem Grad gibt. Machen Sie sich dann zunutze, daß diese Erweiterungen sich mit Hilfe von Eisensteinpolynomen beschreiben lassen (Blatt 7), und verwenden Sie das Krasnersche Lemma (Blatt 6) sowie ein Kompaktheitsargument.

Aufgabe 8.2

Sei $L\,|\,K$ eine rein verzweigte Erweiterung nicht-archimedischer lokaler Körper der Restklassencharakteristik p. Zudem sei $L\,|\,K$ *zahm verzweigt*, d. h., es gelte $[L : K] = e \not\equiv_p 0$.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein uniformisierendes Element π von K mit $L = K(\sqrt[e]{\pi})$.

Hinweis. Der Restklassenkörper von K habe q Elemente. Sei ϖ ein uniformisierendes Element von K, und Π ein uniformisierendes Element von L. Verifizieren Sie: $\Pi^e = zu\varpi$ mit einer $(q-1)$-ten Einheitswurzel $z \in K$ und einer Einseinheit u von L. Überzeugen Sie sich nun davon, daß u in L eine e-te Wurzel besitzt und nutzen Sie diese, um Π geeignet zu modifizieren und π zu erhalten.

(b) Sei nun zusätzlich $L\,|\,K$ galoissch, und die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers von K sei q. Zeigen Sie: K enthält eine primitive e-te Einheitswurzel, insbesondere gilt $e \mid (q-1)$, und $\mathrm{Gal}(L\,|\,K)$ ist zyklisch der Ordnung e.

Hinweis. Erinnern Sie sich an die Behandlung einfacher Radikalerweiterungen in der Algebra-Vorlesung.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Sei $L\,|\,K$ eine galoissche Erweiterung lokaler Körper mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L\,|\,K)$. Zeigen Sie: G ist eine auflösbare Gruppe.

Hinweis. Der archimedische Fall ist nahezu trivial. Seien L und K nun nicht-archimedisch. Reduzieren Sie die Aufgabe auf den Fall, daß $L\,|\,K$ rein verzweigt ist. Wählen Sie eine p-Sylowuntergruppe H von G und bezeichnen Sie mit F den zughörigen Zwischenkörper. Überlegen Sie sich mit ähnlichen Methoden wie in Aufgabe 8.2, daß $F\,|\,K$ galoissch mit zyklischer Galoisgruppe ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geq 3$. Zeigen Sie: Die Gruppe $U_1 = 1 + p\mathbb{Z}_p$ der Einseinheiten von $\mathbb{Q}_p$ besitzt in $\langle 1 + p \rangle$ eine topologisch dichte, unendlich-zyklische Untergruppe, und U_1 ist als topologische Gruppe isomorph zu der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_p$.

Hinweis. Jedes Element $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$, mit Koeffizienten $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, ist definitionsgemäß der Grenzwert der entsprechenden Partialsummen $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_i p^i \in \mathbb{N}_0$ für $N \to \infty$. Überlegen Sie sich, daß $(1+p)^{A_N}$, $N \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge ist und daß durch $(1+p)^a =_{\text{def}} \lim_{N\to\infty}(1+p)^{A_N}$ tatsächlich ein Isomorphismus topologischer Gruppen von der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_p$ auf die multiplikative Gruppe U_1 gegeben ist.

(b) Formulieren und beweisen Sie ein analoges Ergebnis für die Einheitengruppe von $\mathbb{Q}_2$.