Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 9

Abgabe der Lösungen am 10.06.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 9.1 und 9.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Sei A eine R-Algebra, für einen kommutativen Ring R mit Eins.

(a) Sei M ein A-Linksmodul. Zeigen Sie, daß die nachfolgenden Bedingungen paarweise äquivalent sind: (i) M ist die Summe seiner einfachen Teilmoduln. (ii) M ist halbeinfach, d. h. die direkte Summe einer geeigneten Familie einfacher Teilmoduln. (iii) Für jeden Teilmodul $N \leq M$ existiert ein Komplement, also ein Teilmodul $\tilde{N} \leq M$ mit $M = N \oplus \tilde{N}$.

Hinweis. In dem Fall, daß M nicht endlich erzeugt ist, kommt an geeigneter Stelle das Zornsche Lemma zum Einsatz.

(b) Folgern Sie: Teilmoduln und Faktormoduln eines halbeinfachen A-Linksmoduls sind ebenfalls halbeinfach.

(c) Folgern Sie: Für einen halbeinfachen A-Linksmodul M sind äquivalent: (i) M ist endlich erzeugt. (ii) M ist noethersch.[1] (iii) M ist artinsch.[2]

(d) Erklären Sie: Ist M ein endlich erzeugter, halbeinfacher A-Linksmodul, so ist $M = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ die direkte Summe von endlich vielen einfachen Teilmoduln N_i. Dabei sind die Isomorphietypen der beteiligten einfachen Summanden inklusive ihrer Vielfachheiten unabhängig von der speziell gewählten Zerlegung. Insbesondere ist der Parameter r, die Kompositionslänge von M, eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Entsprechende Aussagen gelten dann wie üblich auch für Rechtsmoduln.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis. Sei $B = \mathrm{End}_K(V)$ die K-Algebra aller linearen Endomorphismen und

$$I = \{\beta \in B \mid \dim_K(V\beta) < \infty\}.$$

(a) Zeigen Sie: I ist ein beidseitiges Ideal von B, und $A = B/I$ ist eine einfache K-Algebra.

(b) Als A-Rechtsmodul ist A weder noethersch noch artinsch.[3]

Hinweis. Sei e_i, $i \in \mathbb{N}$, eine K-Basis für V. Jedes $J \subseteq \mathbb{N}$ liefert einen K-Untervektorraum $W_J = \langle e_j \mid j \in J \rangle$ und ein Rechtsideal $\{\beta \in B \mid \dim_K(W_J\beta) < \infty\}$ von B, welches I enthält.

(c) Folgern Sie: Die K-Algebra A ist nicht halbeinfach.

Bitte wenden!

[1] D. h., der Modul M erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Teilmoduln.

[2] D. h., der Modul M erfüllt die absteigende Kettenbedingung für Teilmoduln.

[3] Allgemein läßt sich zeigen: Jeder artinsche Modul ist noethersch. Sie können hier aber leicht direkt argumentieren, daß weder die aufsteigende noch die absteigende Kettenbedingung erfüllt ist.

Aufgabe 9.3

Sei $k = \mathbb{F}_p$ ein Primkörper positiver Charakteristik p, mit algebraischem Abschluß $\overline{k}$. Sei f der Erweiterungskörper von k innerhalb von $\overline{k}$, der durch Hinzufügen der primitiven l-ten Einheitswurzeln für alle von p verschiedenen Primzahlen l entsteht. Zeigen Sie: $f = \overline{k}$.

Hinweis. Überlegen Sie sich, daß es genügt, zu zeigen: Zu jeder Primzahlpotenz $q^m > 1$ existiert eine Primzahl l dergestalt, daß die Ordnung von p modulo l gleich q^m ist. Solch ein l erhalten Sie mit van der Waerdens Trick wie folgt: Die ganze Zahl

$$\frac{p^{q^m} - 1}{p^{q^{m-1}} - 1} = \frac{\left((p^{q^{m-1}} - 1) + 1\right)^q - 1}{p^{q^{m-1}} - 1} = \sum_{i=1}^{q} \binom{q}{i} (p^{q^{m-1}} - 1)^{i-1}$$

besitzt stets einen Primteiler l, der $p^{q^{m-1}} - 1$ nicht teilt.

Aufgabe 9.4

Wir arbeiten mit dem Polynomring $\mathbb{Q}[x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots]$ in abzählbar vielen Variablen und betrachten Folgen $z = (z_1, z_2, \ldots)$, genannt *„Vektoren“*, mit *Komponenten* z_n in dem Ring $\mathbb{Z}[x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots]$. Die *Nebenkomponenten* von z sind definiert als

$$z^{(n)} = \sum_{d|n} d\, z_d^{n/d}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen die Nebenkomponenten $z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}$ eindeutig die Komponenten $z_1, \ldots, z_n$. Also bestimmen sämtliche $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots$ den „Vektor“ z.

(b) Zeigen Sie: Die formale Potenzreihe $F_z(t) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z_n t^n)$ erfüllt die Gleichung

$$-t \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log F_z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{(n)} t^n,$$

wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log f(t) = f'(t)/f(t)$ für $f(t) \equiv_t 1$ gesetzt sei.

(c) Die Summe $x + y$ bzw. das Produkt $x \cdot y$ der „Vektoren“ $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ sei koordinatenweise bzgl. ihrer Nebenkomponenten definiert:

$$(x + y)^{(n)} = x^{(n)} + y^{(n)} \quad \text{und} \quad (x + y)^{(n)} = x^{(n)} + y^{(n)} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Verifizieren Sie, daß auf diese Weise „Vektoren“ $x + y$ und $x \cdot y$ beschrieben werden, deren n-te Komponente jeweils in $\mathbb{Z}[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]$ liegt und sich somit direkt aus den Komponenten von x und y berechnen läßt.

Hinweis. Zeigen und verwenden Sie die Beziehungen

$$F_{x+y}(t) = F_x(t) F_y(t) \quad \text{sowie} \quad F_{x \cdot y}(t) = \prod_{d=1}^{\infty} \prod_{e=1}^{\infty} \left(1 - x_d^{\mathrm{kgV}(d,e)/d} y_e^{\mathrm{kgV}(d,e)/e} t^{\mathrm{kgV}(d,e)}\right)^{\frac{de}{\mathrm{kgV}(d,e)}}.$$

(d) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Prüfen Sie, daß sich mittels der in (c) beschriebenen polynomiellen Verknüpfungen auf der Menge aller „Vektoren“ $a = (a_1, a_2, \ldots)$ mit Komponenten in R die Struktur eines kommutativen Rings $\mathsf{W}(R)$ mit Eins ergibt.

(e) Erläutern Sie: $\mathsf{W}(\cdot)$ ist ein Funktor, d. h., jeder Ringhomomorphismus $\varphi: R \to S$ vermittelt einen kanonischen Ringhomomorphismus $\mathsf{W}(\varphi): \mathsf{W}(R) \to \mathsf{W}(S)$.

(f) Erklären Sie: Der Ring $\mathsf{W}(\mathbb{Q})$ ist isomorph zu dem Ring $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ aller rationalen Folgen mit gliedweiser Addition und Multiplikation.

(g) Zeigen Sie: Für $p \in \mathbb{P}$ ist $\mathsf{W}(\mathbb{F}_p)$ nicht isomorph zu dem Folgenring $\mathbb{F}_p^{\mathbb{N}}$.

Hinweis. Berechnen Sie $1 + \ldots + 1$ in $\mathsf{W}(\mathbb{F}_p)$.

Bemerkung. $\mathsf{W}(R)$ heißt *Ring der universellen Wittvektoren* mit Komponenten in R.