

Zahlentheorie II – Blatt 10

Abgabe der Lösungen am 24.06.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 10.2 und 10.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/.

Aufgabe 10.1

Seien A, B Algebren über einem Körper K . Auf $M = A \times B$ ist durch koordinatenweise Multiplikation die Struktur einer Halbgruppe mit Eins gegeben. Wir bezeichnen mit $K[M]$ die zugehörige K -Algebra: Als Vektorraum hat $K[M]$ die K -Basis M und die Multiplikation auf $K[M]$ ergibt sich mittels linearer Fortsetzung in natürlicher Weise aus der Halbgruppenmultiplikation.

Definieren Sie das Tensorprodukt $A \otimes_K B$ der Algebren A und B , inklusive der K -Algebrenhomomorphismen $\iota_A: A \rightarrow A \otimes_K B$ und $\iota_B: B \rightarrow A \otimes_K B$, als geeignete Restklassenalgebra $K[M]/I$, indem Sie passende Erzeuger für ein beidseitiges Ideal angeben, und verifizieren Sie anschließend, daß $A \otimes_K B$ die gewünschte universelle Eigenschaft besitzt und bis auf Isomorphie durch diese eindeutig bestimmt ist: Sind $\varphi_A: A \rightarrow C$ und $\varphi_B: B \rightarrow C$ Algebrenhomomorphismen in eine K -Algebra C mit der Eigenschaft $(a\varphi_A)(b\varphi_B) = (b\varphi_B)(a\varphi_A)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$, so existiert stets genau ein Algebrenhomomorphismus $\psi: A \otimes_K B \rightarrow C$ mit $\iota_A\psi = \varphi_A$ und $\iota_B\psi = \varphi_B$.

Zeigen Sie weiter: Ist $(a_i)_{i \in I}$ eine K -Basis für A , so läßt sich jedes $x \in A \otimes_K B$ eindeutig als Summe $x = \sum_{i \in I} a_i \otimes b_i$ mit $b_i \in B$ schreiben, wobei $\{i \in I \mid b_i \neq 0\}$ jeweils endlich ist. Insbesondere sind ι_A und ι_B injektiv, falls keine der Algebren A, B eine Nullalgebra ist, und in jedem Fall gilt $\dim_K(A \otimes_K B) = \dim_K(A) \dim_K(B)$.

Hinweis. Es ist geschickt, wenn Sie das Ideal I gleich als Untervektorraum identifizieren. So erkennen Sie, daß $A \otimes_K B$ als Vektorraum mit dem Tensorprodukt der Vektorräume A und B übereinstimmt.

Aufgabe 10.2

(4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist $\text{Br}(K) = \{[K]\}$.
(b) Rechnen Sie für $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, den $\mathbb{R}$ -Divisionsring der Hamiltonschen Quaternionen, direkt nach: $[\mathbb{H}] \in \text{Br}(\mathbb{R})$ hat die Ordnung 2.
(c) Für $p \in \mathbb{P}$ sei $Q(-1, p | \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}1 + \mathbb{Q}u + \mathbb{Q}v + \mathbb{Q}w \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ mit

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = uv = -vu = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $Q(-1, p | \mathbb{Q})$ stets eine 4-dimensionale zentrale einfache $\mathbb{Q}$ -Algebra bildet. Untersuchen Sie, für welche $p \in \mathbb{P}$ gilt: $[Q(-1, p | \mathbb{Q})] = [\mathbb{Q}]$ in $\text{Br}(\mathbb{Q})$.

Hinweis. Die Elemente von $Q(-1, p | \mathbb{Q})_{-1, p}$ lassen sich schreiben als $\begin{pmatrix} x & y \\ py & x \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{Q}(i)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3

(4 Punkte)

Zeigen Sie: $\text{Br}(\mathbb{Q})$ ist unendlich.

Hinweis. Verwenden Sie die Algebren $Q(-1, p | \mathbb{Q})$ aus der vorherigen Aufgabe.

Aufgabe 10.4

Zeigen Sie den folgenden Satz von Wedderburn: Jeder endliche Divisionsring ist kommutativ, also bereits ein Körper.

Bemerkung. Anders ausgedrückt bedeutet dies: Die Brauerschen Gruppen endlicher Körper sind stets trivial.

Hinweis. Sei D ein endlicher Divisionsring und L ein maximaler Teilkörper von D . Folgen Sie unter Verwendung des Satzes von Skolem und Noether: Die endliche Gruppe $D^\times$ ist die Vereinigung aller zu $L^\times$ konjugierten Untergruppen. Zeigen Sie mittels eines Abzählarguments, daß $L^\times$ keine echte Untergruppe von $D^\times$ sein kann und daher $D = L$ bereits kommutativ ist.