Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 11

Abgabe der Lösungen am 01.07.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 11.3 und 11.4 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 11.1

Die endliche Körpererweiterung $L \mid K$ sei rein inseparabel, d. h., alle Elemente $a \in L \setminus K$ seien inseparabel über K. Zeigen Sie: Für $b \in L$ existiert stets $m \in \mathbb{N}_0$ mit $b^{p^m} = c \in K$, wobei $p = \operatorname{char}(K)$ ist. Ist hierbei m kleinstmöglich gewählt, so ist $X^{p^m} - c \in K[X]$ bereits das Minimalpolynom von b über K. Insbesondere ist $[L : K]$ eine p-Potenz.

Hinweis. Bekannterweise ist ein Element $a \in L$ inseparabel über K genau dann, wenn sein Minimalpolynom $f = \operatorname{Minpol}_K(a)$ die Bedingung $f' = 0$ erfüllt.

Aufgabe 11.2

Sei D ein Schiefkörper und $v\colon D \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine *Bewertung* auf D, d. h., für $a, b \in D$ gelten: (i) $v(a) = \infty \leftrightarrow a = 0$, (ii) $v(ab) = v(a) + v(b)$, (iii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Überprüfen Sie: Für jede beliebige Wahl von $c \in (0,1)_{\mathbb{R}}$ vermittelt v, über $|a| = c^{v(a)}$, einen nicht-archimedischen Absolutbetrag auf D, d. h., für $a, b \in D$ gelten: (i) $|a| = 0 \leftrightarrow a = 0$, (ii) $|ab| = |a||b|$, (iii) $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$. Überlegen Sie weiter: Auf diese Weise erhält D die Struktur eines metrischen Raumes, und bzgl. der zugehörigen Topologie sind die Schiefkörperverknüpfungen stetig.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, A eine zentraleinfache K-Algebra und $\dim_K(A) = n^2$. Die *reguläre Norm* eines Elementes $a \in A$ ist $\mathrm{N}_{A|K}(a) = \det(\mu_a)$, wobei die K-lineare Abbildung $\mu_a\colon A \to A$, $x \mapsto xa$ durch Multiplikation mit a gegeben ist. Zeigen Sie: Ist L ein Zerfällungskörper für A und $\vartheta\colon L \otimes_K A \to \operatorname{Mat}_n(L)$ ein Algebrenisomorphismus, so ist $\det(a\vartheta) \in K$ unabhängig von der speziellen Wahl von L, und es gilt $\mathrm{N}_{A|K}(a) = \det(a\vartheta)^n$.

Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Skolem–Noether, um zu verifizieren, daß die speziellen Wahlen von L (innerhalb eines algebraischen Abschlusses von K) und von ϑ keinen Unterschied hinsichtlich des Wertes von $\det(a\vartheta)$ machen. Verwenden Sie dann eine galoissche Erweiterung $L \mid K$ und ein zugehöriges ϑ, um zu prüfen, daß $\det(a\vartheta)$ invariant unter allen $\sigma \in \operatorname{Gal}(L \mid K)$ ist und daher in K liegt. Folgern Sie abschließend $\mathrm{N}_{A|K}(a) = \det(a\vartheta)^n$.

Bemerkung. Sind L und ϑ wie in der Aussage oben, so heißt $\mathrm{N}^{\mathrm{red}}_{A|K}(a) = \det(a\vartheta) \in K$ die *reduzierte Norm* von $a \in A$. Die Beschreibung mittels der reduzierten Norm zeigt insbesondere: Es ist $\mathrm{N}_{A|K}(a) = \mathrm{N}_{A^{\#}|K}(a)$, d. h., wir hätten die reguläre Norm genauso gut über Linksmultiplikation definieren können.

(b) Sei K ein lokaler Körper und D eine endlich-dimensionale, zentrale K-Divisionsalgebra. Zeigen Sie: Dann läßt sich die normierte (Exponenten-)Bewertung v_K auf K eindeutig zu einer Bewertung v_D auf D (im Sinne von Aufgabe 11.2) fortsetzen, und es gilt

$$v_D(x) = v_K\big(\mathrm{N}_{D|K}(x)\big) / \dim_K(D)^2 \qquad \text{für } x \in D.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie den folgenden Satz von Frobenius (1877): Bis auf Isomorphie ist die Algebra $\mathbb{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen die einzige nicht-kommutative, endlich dimensionale (assoziative) $\mathbb{R}$-Divisionsalgebra.

Bemerkung. Anders ausgedrückt bedeutet dies: $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\} \cong C_2$.

Hinweis. Als Zerfällungskörper kommt nur $\mathbb{C}$ in Betracht. Verwenden Sie die zu Beginn von Abschnitt 5 bereitgestellte Methodik, um über Faktorensysteme die möglichen Kandidaten entsprechend einzuschränken.