Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Alena Meyer, M.Sc.
Sommersemester 2025

Zahlentheorie II – Blatt 12

Abgabe der Lösungen am 08.07.2025 in der Übungsstunde, um 14.30 Uhr

Aufgaben 12.1 und 12.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ZahlenII_SS25/`.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Sei $\widetilde{L}\,|\,K$ eine endliche galoissche Körpererweiterung sowie $\widetilde{G} = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}\,|\,K)$, und $L\,|\,K$ eine galoissche Teilerweiterung sowie $G = \mathrm{Gal}(L\,|\,K)$. Dann ist $\widetilde{N} = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}\,|\,L)$ der Kern des surjektiven Gruppenhomomorphismus $\widetilde{G} \twoheadrightarrow G$, $\widetilde{\sigma} \mapsto \widetilde{\sigma}|_L$ und somit $\widetilde{G}/\widetilde{N} \cong G$.
Die natürliche Einbettung $\mathrm{Br}(L\,|\,K) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\widetilde{L}\,|\,K)$ vermittelt die *Inflationsabbildung*

$$\inf_{\widetilde{L}|K} \colon \mathrm{H}^2(G, L^\times) \hookrightarrow \mathrm{H}^2(\widetilde{G}, \widetilde{L}^\times)$$

dergestalt, daß das nachfolgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Br}(L\,|\,K) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathrm{Br}(\widetilde{L}\,|\,K) \\
{\scriptstyle f_{L|K}}\big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\big\downarrow{\scriptstyle f_{\widetilde{L}|K}} \\
\mathrm{H}^2(G, L^\times) & \xrightarrow{\inf_{\widetilde{L}|L}} & \mathrm{H}^2(\widetilde{G}, \widetilde{L}^\times)
\end{array}$$

Zeigen Sie: Explizit ist die Inflation einer durch den Cozykel c repräsentierten Kohomologieklasse $\gamma = [c] \in \mathrm{H}^2(G, L^\times)$ wie folgt durch die Inflation $\widetilde{c}$ des Cozykels c gegeben:

$$\inf_{\widetilde{L}|L}(\gamma) = [\widetilde{c}] \qquad \text{für } \widetilde{c}_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}} = c_{\sigma,\tau}, \text{ wobei } \sigma = \widetilde{\sigma}|_L,\ \tau = \widetilde{\tau}|_L \text{ die kanonischen Bilder von } \widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} \in \widetilde{G} \text{ unter der natürlichen Projektion } \widetilde{G} \twoheadrightarrow G \text{ sind.}$$

Hinweis. Folgen Sie der Skizze aus der Vorlesung bzw. im Vorlesungsskript. Nutzen Sie für $[A] \in \mathrm{Br}(L\,|\,K) \subseteq \mathrm{Br}(\widetilde{L}\,|\,K)$ dabei also insbesondere die Isomorphien

$$\widetilde{L} \otimes_K A \cong \widetilde{L} \otimes_L (L \otimes_K A) \quad \text{und} \quad \mathrm{End}_{\widetilde{L}}(\widetilde{L} \otimes_L V) \cong \mathrm{End}_L(V) \otimes_L \widetilde{L}$$

für einen gegebenen Algebrenisomorphismus $\vartheta \colon L \otimes_K A \to \mathrm{End}_L(V)$, der belegt, daß die zentraleinfache K-Algebra A über L zerfällt.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Sei $L\,|\,K$ eine endliche galoissche Körpererweiterung sowie $G = \mathrm{Gal}(L\,|\,K)$. Sei $\widetilde{K}$ ein beliebiger Erweiterungskörper von K innerhalb eines algebraischen Abschlusses $\overline{L}^{\mathrm{alg}}$ von L, und sei $\widetilde{L}$ das Kompositum von L und $\widetilde{K}$, also der kleinste Teilkörper von $\overline{L}^{\mathrm{alg}}$, der beide Körper umfaßt. Dann sind $L\,|\,L \cap \widetilde{K}$ und $\widetilde{L}\,|\,\widetilde{K}$ endliche galoissche Erweiterungen mit zueinander isomorphen Galoisgruppen $H = \mathrm{Gal}(L\,|\,L \cap \widetilde{K})$ und $\widetilde{H} = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}\,|\,\widetilde{K})$; ein konkreter

Bitte wenden!

Isomorphismus ist gegeben durch $\widetilde{H} \xrightarrow{\cong} H$, $\widetilde{\sigma} \mapsto \widetilde{\sigma}|_L$. Weiter ist H eine Untergruppe von G. Die *Restriktionsabbildung* $\operatorname{res}_{\widetilde{K}|K}\colon \operatorname{Br}(L\,|\,K) \to \operatorname{Br}(\widetilde{L}\,|\,\widetilde{K})$, die mittels Konstantenerweiterung, also durch $[A] \mapsto [\widetilde{K} \otimes_K A]$, gegeben ist, vermittelt einen Homomorphismus

$$\operatorname{res}_{\widetilde{K}|K}\colon \mathrm{H}^2(G, L^\times) \hookrightarrow \mathrm{H}^2(\widetilde{H}, \widetilde{L}^\times)$$

dergestalt, daß das nachfolgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Br}(L\,|\,K) \arrow[r, "\operatorname{res}_{\widetilde{K}|K}"] \arrow[d, "f_{L|K}"', "\cong"] & \operatorname{Br}(\widetilde{L}\,|\,\widetilde{K}) \arrow[d, "\cong"', "f_{\widetilde{L}|\widetilde{K}}"] \\
\mathrm{H}^2(G, L^\times) \arrow[r, "\operatorname{res}_{\widetilde{K}|K}"] & \mathrm{H}^2(\widetilde{H}, \widetilde{L}^\times)
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Explizit ist die Restriktion einer durch den Cozykel c repräsentierten Kohomologieklasse $\gamma = [c] \in \mathrm{H}^2(G, L^\times)$ wie folgt durch die Restriktion $\widetilde{c}$ des Cozykels c gegeben:

$$\operatorname{res}_{\widetilde{K}|K}(\gamma) = [\widetilde{c}] \qquad \text{für } \widetilde{c}_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}} = c_{\sigma,\tau}, \text{ wobei } \sigma = \widetilde{\sigma}|_L,\ \tau = \widetilde{\tau}|_L \text{ die kanonischen Bilder}$$
$$\text{von } \widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} \in \widetilde{H} \text{ unter der Einbettung } \widetilde{H} \xrightarrow{\cong} H \hookrightarrow G \text{ sind.}$$

Bemerkung. Ist $\widetilde{K}$ ein Zwischenkörper von $L\,|\,K$, so ist $\widetilde{L} = L$, $\widetilde{K} = L \cap \widetilde{K}$ und $\widetilde{H} = H \leq G$; in diesem Fall ist $\widetilde{c}$ schlicht die Einschränkung von $c\colon G \times G \to L^\times$ auf $H \times H$.

Hinweis. Folgen Sie der Skizze aus der Vorlesung bzw. im Vorlesungsskript. Nutzen Sie für $[A] \in \operatorname{Br}(L\,|\,K)$ und $[\widetilde{K} \otimes_K A] \in \operatorname{Br}(\widetilde{L}\,|\,\widetilde{K})$ dabei also insbesondere die Isomorphien

$$\widetilde{L} \otimes_{\widetilde{K}} (\widetilde{K} \otimes_K A) \cong \widetilde{L} \otimes_L (L \otimes_K A) \quad \text{und} \quad \operatorname{End}_{\widetilde{L}}(\widetilde{L} \otimes_L V) \cong \operatorname{End}_L(V) \otimes_L \widetilde{L}$$

für einen gegebenen Algebrenisomorphismus $\vartheta\colon L \otimes_K A \to \operatorname{End}_L(V)$, der belegt, daß die zentraleinfache K-Algebra A über L zerfällt.

Aufgabe 12.3

Diese Aufgabe schließt sich an Aufgabe 9.4 an. Als Vorüberlegung machen Sie sich zunächst klar: Für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{N}$, die der Bedingung $t \mid s \in S \,\to\, t \in S$ genügt, kann die auf Blatt 9 beschriebene Konstruktion analog mit eingeschränkten „Vektoren“ $z = (z_s)_{s \in S}$ durchgeführt werden. Auf diese Weise ergibt sich für jeden kommutativen Ring R mit Eins ein Ring $\mathsf{W}_S(R)$, der in natürlicher Weise sowohl als Teil- als auch als Faktorring von $\mathsf{W}(R)$ betrachtet werden kann.

Sei nun $p \in \mathbb{P}$ und speziell $S = \{p^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller p-Potenzen. Wir schreiben in dieser Situation $\mathsf{W}_p(R)$ für den bereits oben betrachteten Ring $\mathsf{W}_S(R)$.

Notationstechnisch bietet es sich zudem an, „Vektoren“ nunmehr als $z = [z_0, z_1, \ldots]_p$ zu schreiben, wobei Indizes mittels $\mathbb{N}_0 \to S$, $i \mapsto p^i$ im Zusammenhang mit der vorherigen Schreibweise stehen. Die Komponenten kommen entsprechend aus dem Ring $\mathbb{Z}[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots]$. Die Nebenkomponeten eines „Vektors“ z bezeichnen wir, ebenfalls logarithmisch numeriert, mit $z^{[0]}, z^{[1]}, \ldots$.

(a) Verifizieren Sie: Mit der neuen Notation gilt definitionsgemäß

$$z^{[n]} = z_0^{p^n} + p z_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^n z_n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Berechnen Sie explizite Formel für die Komponenten z_0 und z_1 der Summe bzw. des Produktes $z \in \{x+y, x \cdot y\}$ der „Vektoren“ $x = [x_0, x_1, \ldots]_p$ und $y = [y_0, y_1, \ldots]_p$, für die wie in Aufgabe 9.4 über die Nebenkomponenten definierten Verknüpfungen.

(b) Zeigen Sie: Für „Vektoren“ a, b mit Komponenten in $\mathbb{Z}[x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots]$ gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N}_0 : a_i \equiv_p b_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 : a^{[i]} \equiv_{p^{i+1}} b^{[i]}.$$

(c) Der *Verschiebe-* und der *Frobeniusoperator* auf der Menge der „Vektoren“ $z = [z_0, z_1, \ldots]_p$ seien wie folgt definiert: $V.z = [0, z_0, z_1, \ldots]_p$ und $F.z = [z_0^p, z_1^p, \ldots]_p$.
Überprüfen Sie, daß V und F kommutieren, und verifizieren Sie die folgenden Formeln:

$$(V.z)^{[n]} = p\, z^{[n-1]} \quad \text{und} \quad z^{[n]} = (F.z)^{[n-1]} + p^n z_n \qquad \text{fur } n \in \mathbb{N}.$$

(d) Sei nun k ein Körper der Charakteristik p, und betrachten Sie den Ring $\mathsf{W}_p(k)$ der *p-typischen Wittvektoren* mit Komponenten in k. Zeigen Sie: Der Verschiebeoperator V vermittelt einen additiven Endomorphismus von $\mathsf{W}_p(k)$, der Frobeniusoperator F vermittelt einen Ringendomorphismus von $\mathsf{W}_p(k)$, und es gilt

$$p\, a = V.F.a \qquad \text{für alle } a = [a_0, a_1, \ldots]_p \in \mathsf{W}_p(k).$$

Hinweis. Verwenden Sie die Aussagen aus (b) und (c).

(e) Sei nun k ein perfekter Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie: $\mathsf{W}_p(k)$ ist ein diskreter Bewertungsring im algebraischen Sinne[1] mit maximalem Ideal $p\,\mathsf{W}_p(k)$; die auf dem Quotientenkörper K definierte zugehörige normierte diskrete Bewertungsabbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ erfüllt $v(a) = m$ für $a = [0, 0, \ldots, 0, a_m, \ldots]_p$ mit $a_m \neq 0$, der bewertete Körper K ist vollständig und hat die Charakteristik 0.

Hinweis. Nutzen Sie: Durch $a \mapsto \underline{a} = [a, 0, \ldots]_p$ wird ein Gruppenhomomorphismus von $k^\times$ nach $\mathsf{W}_p(k)$ definiert. Jedes Element $a = [a_0, a_1, \ldots]_p \in \mathsf{W}_p(k)$ läßt sich dann als $\sum_{i=0}^{\infty} V^i.\underline{a_i}$ entwickeln. (Erläutern Sie dabei, wie die formal unendliche Summe zu verstehen ist!)

(f) Folgern Sie: Für endliche Körper k ist $\mathsf{W}_p(k)$ kanonisch isomorph zu dem Bewertungsring der unverzweigten Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Restklassenkörper k.

[1] vgl. Aufgabe 7.1