Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 06.06.2018
Blatt 9

Übungen zu Gröbner-Basen

25. Das Ideal I in $\mathbb{C}[x,y]$ sei gegeben durch $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$, wobei

$$\begin{aligned} g_1 &= x^2 + 2y^2 - 3, \\ g_2 &= xy - y^2, \\ g_3 &= y^3 - y. \end{aligned}$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass es sich bei $\{g_1, g_2, g_3\}$ um eine Gröbner-Basis von I zur Termordnung $>_{\text{lex}}$ mit $x > y$ handelt.

(a) Bestimmen Sie alle Elemente von

$$V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \middle| f(x,y) = 0 \text{ für alle } f \in I \right\}.$$

(b) Es sei $\widetilde{G}$ die reduzierte Gröbner-Basis von I zur Termordnung $>_{\text{lex}}$ mit $y > x$. Über $\widetilde{G}$ verrate ich Ihnen, dass das Basiselement g_t mit dem kleinsten führenden Term den Totalgrad 4 besitzt. Geben Sie g_t an.

26. Es sei k ein beliebiger Körper und es sei $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Ferner sei G eine reduzierte Gröbner-Basis von I zur Termordnung $>_{\text{lex}}$ mit $x_1 > \cdots > x_n$. Zeigen Sie, dass $G \cap k[x_n]$ höchstens ein Element enthält.

27. Das Ideal $I \subset \mathbb{Q}[x,y]$ sei gegeben durch $I = \left\langle x^2 + 2y^2 - 2, x^2 + xy + y^2 - 2 \right\rangle$. Bestimmen Sie alle Elemente von

$$V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \middle| f(x,y) = 0 \text{ für alle } f \in I \right\}.$$

Hinweis: Eventuell benötigte Gröbner-Basen dürfen maschinell bestimmt werden. Das sollte aber auch von Hand machbar sein.

Besprechung: 13. Juni