Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 16.06.2025
Blatt 10

Übungen zur Analysis I

1. (10P) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von
$$f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (a) (3P) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-2^{-x}}{1-2^x}$

   (b) (3P) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$

   (c) (4P) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} \left(\frac{\tan(\pi x)}{2x-1} + \frac{2}{\pi(2x-1)^2}\right)$

3. Bestimmen Sie sämtliche Wendepunkte von

   (a) (2P) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$,
   (b) (4P) $g\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$,
   (c) (4P) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$,

   und begründen Sie Ihr Vorgehen.

4. Es sei $I =]a, b[$ ein offenes Intervall. Zeigen Sie:

   (a) (2P) Für jedes $C \in \mathbb{R}$ erfüllt die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto Ce^x$, die Gleichung $f' = f$.
   (b) (8P) Es gibt keine weiteren Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f' = f$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung der Funktion $g(x) = f(x)\exp(-x)$.

Abgabe: Mo, 23.06., 10:00 im ILIAS — Besprechung: 25. und 26. Juni 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.