

Übungen zur Analysis I

1. (a) (Je 2P) Stellen Sie fest, ob die folgenden drei uneigentlichen Integrale existieren

(a) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$ (b) $\int_0^1 \frac{dx}{x \log x}$ (c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x \log x}$

- (b) (4P) Aus Symmetriegründen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^{-1/n} \frac{dx}{x^3} + \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^3} \right) = 0.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$ nicht existiert, indem Sie Nullfolgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ angeben, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^{s_n} \frac{dx}{x^3} + \int_{t_n}^1 \frac{dx}{x^3} \right)$$

existiert, aber nicht gleich 0 ist.

Hinweis: Es gibt verschiedene Methoden, mit denen man zeigen kann, dass das uneigentliche Integrale nicht existiert. Bei dieser Aufgabe sollen aber tatsächlich konkrete Folgen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ angegeben werden.

2. Ziel ist die Berechnung des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Wir definieren

$$\begin{aligned} \cosh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ \sinh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \end{aligned}$$

- (a) (1P) Zeigen Sie $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.
(b) (1P) Zeigen Sie, dass $\cosh$ auf $[0, \infty[$ streng monoton wächst.
(c) (3P) Zeigen Sie, dass $\cosh: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ eine Umkehrfunktion besitzt. Sie wird mit Arcosh (Area-Cosinus hyperbolicus) bezeichnet.
(d) (2P) Bestimmen Sie die Ableitung von Arcosh mittels des Satzes 12.11 über die Ableitung der Umkehrfunktion.
(e) (3P) Drücken Sie $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ für $x > 1$ durch Arcosh aus.

3. (10P) Bestimmen Sie $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass

$$1 + bx \sin(ax) = \cos(x) + r(x),$$

wobei $r(x) = O(x^6)$ für $x \rightarrow 0$.

4. (10P) Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt Fixpunkt von f , wenn $f(x) = x$. Ein Fixpunkt x heißt abstoßend, wenn $|f'(x)| > 1$. Zeigen Sie:

Wenn x ein abstoßender Fixpunkt von f ist, dann gibt es ein offenes Intervall I mit $x \in I$, so für jedes $y \in I \setminus \{x\}$ mindestens ein Element der durch

$$y_1 = y, \quad y_{n+1} = f(y_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

definierten Folge nicht in I liegt.

Abgabe: Mo, 07.07., 10:00 im ILIAS

Besprechung: 9. und 10. Juli 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.