Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 28.04.2025
Blatt 3

Übungen zur Analysis I

1. (Je 2P) Beschreiben Sie die folgenden Mengen als disjunkte Vereinigung von Intervallen. Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) $I_a = \left\{ x \middle| \frac{x}{x^{42}+1} \geq 0 \right\}$ (b) $I_b = \{x | (x-4)(x+2) > 0\}$

   (c) $I_c = \{x | \, |x-1| + 2 \leq 3\}$ (d) $I_d = \{x | x^3 < x \text{ und } x < 0\}$

   (e) $I_e = \{x^2 | x > 0\}$

   Achtung: Nutzen Sie keine Verfahren, die auf Kurvendiskussion beruhen, sondern nur die Ordnungsaxiome und Sätze aus der Vorlesung.

2. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen beschränkt sind.

   (a) (2P) $M_a := \left\{ x - \frac{1}{x} \middle| x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$,
   (b) (3P) $M_b := \{-x^4 + x - 1 | x \in \mathbb{R}\}$,
   (c) (3P) $M_c := \{x \in \mathbb{R} | x^4 - x \leq 4\}$,
   (d) (2P) $M_d := \left\{ \frac{1}{2z-1} \middle| z \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Zeigen Sie, dass die Relation "$\leq$", welche in ğ4.2 der Vorlesung definiert wurde, die folgenden Eigenschaften besitzt:

   (a) (1P) (Reflexivität) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$.
   (b) (3P) (Antisymmetrie) Wenn für $x, y \in \mathbb{R}$ sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ gelten, dann folgt $x = y$.
   (c) (4P) (Transitivität) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

4. (a) (8P) Zeigen Sie unter Verwendung der Dreiecksungleichung für alle $x, y \in \mathbb{R}$
   $$\big| |x| - |y| \big| \leq |x - y|.$$
   (b) (2P) Geben Sie jeweils ein Beispiel für $x, y \in \mathbb{R}$ an, bei dem
      i. $\big| |x| - |y| \big| = |x - y|$,
      ii. $\big| |x| - |y| \big| \neq |x - y|$.

Abgabe: Mo, 05.05., 10:00 im ILIAS Besprechung: 7. und 8 Mai 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.