Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 05.05.2025
Blatt 4

Übungen zur Analysis I

1. (Je 2P) Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   (a) $a_n = \dfrac{(n+1)^4}{(2n^2-2)(3n^2+2)}$ (b) $a_n = \dfrac{2n^2+5}{n^3+8n+2}$

   (c) $a_n = \dfrac{6-n^4}{n(n^2-3)}$ (d) $a_n = \dfrac{n^2 3^n - 4^n}{(2^n+n)(2^n-n)}$

   (e) $a_n = \dfrac{n^3+2n+5}{n} - \dfrac{n^3+n^2-2n+5}{n+1}$

2. (10P) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch
$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right).$$
   (a) (4P) Zeigen Sie $a_n \geq \sqrt{3}$ für alle n.
   Hinweis: Bitte keine Kurvendiskussion; wenn man den Induktionsschluss geschickt hinschreibt, taucht eine binomische Formel auf.
   (b) (4P) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt.
   (c) (2P) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert besitzt, und bestimmen Sie diesen.

3. (10P) Es sei $q > 0$. Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n - n^2}{q^n + n^2}.$$
   Hinweis: Der Grenzwert hängt von q ab. Eine Fallunterscheidung ist sinnvoll.

4. (a) (3P) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt.
   (b) (2P) Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \dfrac{n+2}{n+1}$.
   (c) (3P) Verwenden Sie (b), um zu zeigen, dass die durch $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ gegebene Folge monoton fällt, und schlieSSen Sie daraus $a_n \leq 3$ für alle $n \geq 5$.
   (Hinweis: $2^6 \cdot 3^5 = 15\,552$ und $5^6 = 15\,625$.)
   (d) (2P) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Verwenden Sie bei den Aufgabenteilen (a) und (b) die Bernoulli-Ungleichung.

Abgabe: Mo, 12.05., 10:00 im ILIAS Besprechung: 14. und 15 Mai 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.