Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 12.05.2025
Blatt 5

Übungen zur Analysis I

1. (Je 3P) Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut, welche divergieren?

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n-1}$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2-3}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{-n}}{1+3^{-n}}$$ (d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n}}{1+3^{n}}$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$$

Begründen Sie Ihre Entscheidungen!

2. (a) (4P) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$
konvergiert.

(b) (6P) Gehen Sie nun ähnlich vor wie im Beispiel 6.10, um ein Intervall $I = [a, b]$ zu bestimmen mit
$$a \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \leq b \quad \text{und} \quad b - a < \frac{1}{10}.$$

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass die Reihe gegen $\frac{\pi}{4}$ konvergiert.

3. (5P) Geben Sie eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0, \infty[$ an, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergiert.

4. (10) (Cesàro-Konvergenz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die durch
$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j$$
definierte Folge ebenfalls gegen a konvergiert.

Abgabe: Mo, 19.05., 10:00 im ILIAS — Besprechung: 21. und 22 Mai 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.