Übungen zur Analysis I

1. (10P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N}, \\ 2^{-n}, & n = 4k - 1, k \in \mathbb{N}, \\ 3^{-n}, & n = 4k - 3, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

2. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und dokumentieren Sie Ihre Zwischenschritte:

(a) (1P)	$(1 + 2i)^2$	(b) (1P)	$\frac{1}{2i}$
(c) (1P)	$(1 - 2i)^2$	(d) (1P)	$\overline{(1 + 2i)^2}$
(e) (1P)	$ 3 + 4i $	(f) (1P)	$ 4 - 3i $
(g) (2P)	$\frac{2 - i}{2 + i}$	(h) (2P)	$\left \frac{\overline{1 + 3i}}{1 - 3i} \right $

3. Fertigen Sie Skizzen der folgenden Mengen an und begründen Sie Ihr Vorgehen:

(a) (2P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z\}$	(b) (2P)	$\left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \bar{z} = \frac{1}{z}\right\}$
(c) (3P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^2 < 0\}$	(d) (3P)	$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z^2 > 0\}$

4. (10P) Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass es $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $f(0) = f(1) = 0$.

Abgabe: Mo, 02.06., 10:00 im ILIAS

Besprechung: 04. und 05. Juni 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.