Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 02.06.2025
Blatt 8

Übungen zur Analysis I

1. Zeigen Sie für alle $z, w \in \mathbb{C}$:
   (a) (3P) $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos(2z))$,
   (b) (3P) $\sin z + \sin w = 2 \sin \frac{z+w}{2} \cos \frac{z-w}{2}$,
   (c) (4P) $\sin(3z) = \sin(z)\big(3 - 4\sin^2 z\big)$.

2. Zeigen Sie:
   (a) (3P)
   $$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$
   $$\text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\left(\frac{1}{2} + k\right)\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}\right)\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right).$$
   (b) (2P)
   $$\cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2\cot x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$
   (c) (5P) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(\frac{1}{2} + k)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, für die gilt
   $$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

3. Der hyperbolische Cosinus und der hyperbolische Sinus werden definiert durch
   $$\cosh \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$
   $$\sinh \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$
   (a) (2P) Skizzieren Sie die Graphen von $\cosh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (b) (2P) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:
   $$\cosh(z) = \cos(iz).$$
   (c) (3P) Finden Sie eine zu (b) analoge Formel für sinh. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
   (d) (3P) Zeigen Sie $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

4. (10P) Zeigen Sie
   $$\frac{1}{x} = O\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big), \quad x \to \infty.$$

Abgabe: Mo, 09.06., 10:00 im ILIAS — Besprechung: 11. und 12. Juni 2025

Laden Sie bitte Ihre Lösungen im ILIAS hoch. Die Bearbeitungen sind einzeln abzugeben, also nur ein Name pro Blatt.