

## Übungen zur Analysis II

1. Auf dem  $\mathbb{R}^2$  definieren wir  $\|(x, y)\| = |y| + |y - x|$ .
- (a) (4P) Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\|$  eine Norm ist.
- (b) (4P) Zeigen Sie explizit, dass  $\|\cdot\|$  äquivalent zur euklidischen Norm ist, indem Sie  $A, B > 0$  angeben mit

$$A\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq B\|\cdot\|.$$

*Hinweis:* Die Zahlen  $A$  und  $B$  brauchen nicht optimal zu sein.

- (c) (2P) Skizzieren Sie die Einheitskugel  $B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| < 1\}$ .
2. (a) (Je 2P) Welche der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind offen, welche sind abgeschlossen?

$$A = [-2, 0[ \cup ]0, 2] \quad B = ]-1, \infty[ \quad C = \{0\} \cup \{e^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Begründen Sie jeweils Ihre Behauptung.

- (b) (4P) Zeigen Sie, dass die folgende Menge abgeschlossen im  $\mathbb{R}^2$  ist. Sie dürfen dabei keine Ergebnisse aus §3 verwenden.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1\}$$

3. (10P) Es seien  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $Y \subseteq X$  und  $d_Y$  die Teilraummetrik. Zeigen Sie, dass  $A \subseteq Y$  genau dann abgeschlossen in  $(Y, d_Y)$  ist, wenn es eine in  $(X, d)$  abgeschlossene Menge  $B$  mit  $A = B \cap Y$  gibt.

*Hinweis:* Das ist Satz 2.26. Es genügt nicht, diesen Satz zu zitieren.

4. Auf dem Vektorraum  $C[0, 1]$  der stetigen Funktionen  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  erklären wir

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

- (a) (3P) Zeigen Sie, dass durch  $\|\cdot\|_1$  eine Norm auf  $C[0, 1]$  gegeben wird.
- (b) (3P) Zeigen Sie, dass durch  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $C[0, 1]$  gegeben wird.
- (c) (2P) Für  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $p_n(x) := x^n$ . Bestimmen Sie  $\|p_n\|_1$  und  $\|p_n\|_\infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- (d) (2P) Sind die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_\infty$  äquivalent?

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.00.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.

**Abgabe:** Di, 22.10.2019, 12:20

**Besprechung:** 30.–31. Oktober