

## Übungen zur Analysis III

1. (10P) Für zwei Mengen  $A$  und  $B$  bezeichne  $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  ihre *symmetrische Differenz*. Es sei  $X$  eine Menge und es sei  $\mathcal{R}$  eine Teilmenge von  $\mathcal{P}(X)$ . Zeigen Sie:

$\mathcal{R}$  ist genau dann ein Ring von Teilmengen von  $X$ , wenn gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{R}$ .
  - Sind  $A, B \in \mathcal{R}$ , so ist  $A \cap B \in \mathcal{R}$ .
  - Sind  $A, B \in \mathcal{R}$ , so ist  $A\Delta B \in \mathcal{R}$ .
2. (10P) Sei  $X$  eine Menge und sei  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  der Körper mit zwei Elementen. Dann ist  $\text{Abb}(X, \mathbb{F}_2) = \{f: X \rightarrow \mathbb{F}_2 \mid f \text{ Abbildung}\}$ , versehen mit der punktweisen Addition und Multiplikation, ein Ring. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.) Sei nun  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ein Ring von Teilmengen von  $X$ . Zeigen Sie, dass man auf  $\mathcal{R}$  zwei Operationen definieren kann, so dass  $\mathcal{R}$  mit diesen Operationen einen Ring im algebraischen Sinn bildet, der isomorph zu einem Unterring von  $\text{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$  ist. Hat der Unterring eine Eins?

*Hinweis:* Die dem Element  $A \in \mathcal{R}$  zugeordnete Abbildung ist  $\chi_A \in \text{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ , wobei

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Anschließend ist die Frage zu klären, welche der vier zur Verfügung stehenden Operationen  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$  und  $\Delta$  die Rollen von Addition und Multiplikation übernehmen.

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.00.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.

Die Prüfung zur Analysis III erfolgt schriftlich. Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen mindestens 40% der möglichen Übungspunkte erreicht werden. Geplant sind 12.5 Übungsblätter à 40 Punkte. Daraus ergibt sich, dass 200 Punkte für die Teilnahme an der Prüfung benötigt werden.

Studierende der Mathematik, der Finanz- und Versicherungsmathematik und des Studiengangs Naturwissenschaften, die bereits einen erfolglosen Prüfungsversuch in Analysis III absolviert und die Prüfung noch nicht bestanden haben, sind ebenfalls zugelassen.

Studierende anderer Fächer sind auch dann zugelassen, wenn sie eine frühere Zulassung besitzen, egal ob sie bereits an der Prüfung teilgenommen haben oder nicht.

Wer Mathematik, Finanz- und Versicherungsmathematik oder den Studiengang Naturwissenschaften studiert, bei mir die Zulassung erwirbt, aber weder im Februar noch im März 2020 an der Klausur teilnimmt, muss die Zulassung später neu erwerben.