

Übungen zur Analysis III

1. (10P) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es sei $w \in C^1(U)$ ein Vektorfeld, so dass

$$\int_{\partial G} \langle w, \nu \rangle \, d\sigma = 0$$

für alle C^1 -Polyeder G mit $\overline{G} \subset U$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} w = 0$.

Ein solches Vektorfeld nennt man *quellenfrei*.

2. (10P) Zeigen Sie den Gaußschen Integralsatz für ein Rechteck $R =]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$, indem Sie die iterierten Integrale direkt ausführen.
3. (10P) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Oberfläche der S^n .

Hinweis: Verwenden Sie die Volumenformel.

4. (10P) Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Polyeder. Für $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial G$ definieren wir ein Vektorfeld $E_a: \mathbb{R}^3 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$E_a(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|_2^3}.$$

Zeigen Sie

$$\int_{\partial G} \langle E_a, \nu \rangle \, d\sigma = \begin{cases} 0, & a \notin \overline{G}, \\ 4\pi, & a \in G. \end{cases}$$

Hinweis: Im Fall $a \in G$ ist der Gaußsche Integralsatz nicht auf G anwendbar, sondern nur auf $G_r := G \setminus \overline{B}_r(a)$, wobei $r > 0$ hinreichend klein ist.