# Analysis III

Rüdiger W. Braun

Wintersemester 2019/20

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I.

# Maß- und Integrationstheorie

# 1. Quader und Figuren

## Ausgangsfragen

(a) Wenn ein Punkt keine Ausdehnung hat, wie kann dann ein Intervall eine positive Länge besitzen, obwohl es aus Punkten besteht?

(b) Eine *Bewegung* ist eine Verknüpfung von Translationen und Rotationen.

Das *Banach-Tarski-Paradoxon* sagt aus: Es gibt endlich viele disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n$ mit $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ und Bewegungen $B_1, \dots, B_n$, so dass $B_1(A_1) \cup \dots \cup B_k(A_k) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ und $B_{k+1}(A_{k+1}) \cup \dots \cup B_n(A_n) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - (2,0,0)| < 1\}$.

## Antworten

(a) Bei (a) postuliert man implizit eine "überabzählbare Additivität". Das ist zu viel verlangt.

(b) Es gibt also Mengen, denen kein Volumen zugeordnet werden kann. Der Ausweg besteht darin, ein System von messbaren Mengen zu erklären, welches man mit den "normalen" Mengenoperationen nicht verlässt.

Einen Artikel von Prof. Dr. R. Winkler von der TU Wien zum Banach-Tarski-Paradoxon findet man unter `http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/bantar.pdf`.

## Los geht's

**1.1 Bezeichnung.** Die *Potenzmenge* einer Menge $X$ wird mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet.

**1.2 Definition.** Für $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ im $\mathbb{R}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} a \le b &\iff a_i \le b_i \text{ für } 1 \le i \le n, \\ a < b &\iff a_i < b_i \text{ für } 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ist $a \le b$, so definiert man $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \le x < b\}$. Die Menge $[a, b[$ ist ein halboffener, achsenparalleler *Quader* im $\mathbb{R}^n$. Die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $\mathcal{Q}^n$.

Für $[a, b[ \in \mathcal{Q}^n$ ist

$$\lambda_n([a, b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

das *Volumen* von $[a, b[$.

Eine Vereinigung von endlich vielen Quadern im $\mathbb{R}^n$ heißt *Figur* in $\mathbb{R}^n$. Es sei $\mathcal{F}^n$ die Menge aller Figuren im $\mathbb{R}^n$.

Wenn in dieser Vorlesung das Wort "Quader" verwendet wird, ist immer ein halboffener, achsenparalleler Quader gemeint.

**1.3 Lemma.** *Jede Figur ist disjunkte Vereinigung von endlich vielen Quadern.*

**1.4 Definition.** Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{R}$ ist ein *Ring von Teilmengen* von $X$, wenn

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$.

(b) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(c) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, so ist $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

**1.5 Satz.** *$\mathcal{F}^n$ ist ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.*

**1.6 Definition.** Seien $X$ eine Menge und $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von $X$ und sei $\mu \colon \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Abbildung.

(a) $\mu$ ist ein *Inhalt*, wenn

  (i) $\mu(\emptyset) = 0$.

  (ii) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

  (iii) (Additivität) Sind $A_1, A_2, \dots A_N \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{N} A_m\Big) = \sum_{m=1}^{N} \mu(A_m).$$

(b) Wenn $\mu$ ein Inhalt ist und zusätzlich noch die folgende Eigenschaft (iii′) besitzt, dann ist $\mu$ ein *Prämaß*.

  (iii′) ($\sigma$-Additivität) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt und ist $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

*Bemerkung.* Man beachte, dass aus den Eigenschaften eines Rings nicht folgt, dass $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{R}$.

**1.7 Lemma.** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$\lambda_n([a,b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \quad \textit{für alle } [a,b[ \in \mathcal{Q}^n.$$

*Ferner sei* $Q \in \mathcal{Q}^n$ *disjunkte Vereinigung endlich vieler Quader* $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{Q}^n$. *Dann*

$$\lambda_n(Q) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_n(P_j).$$

**1.8 Lemma.** *Für jede disjunkte Vereinigung* $F = \bigcup_{m=1}^{N} Q_j$ *von Quadern setzen wir* $\lambda_n(F) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_n(Q_j)$ *für das* $\lambda_n$ *aus dem vorigen Lemma. Dann ist* $\lambda_n$ *ein Inhalt.*

# 2. σ-Algebren und Maße

**2.1 Definition.** Es sei $X$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist eine *σ-Algebra*, wenn

(a) $\mathcal{A}$ ist ein Ring von Teilmengen von $X$.

(b) $X \in \mathcal{A}$.

(c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, dann $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$.

**2.2 Lemma.** *Der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren ist eine σ-Algebra in $X$.*

**2.3 Satz.** *Zu jeder Teilmenge $\mathcal{T}$ von $\mathcal{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ in $X$, die $\mathcal{T}$ enthält.*

*2.4 Beispiel.* Sei $X$ ein metrischer Raum, $\mathcal{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von $X$. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{T}$ umfasst, ist die σ-Algebra der *Borel-Mengen* von $X$. Sie wird mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnet.

**2.5 Definition.** Ein Prämaß auf einer σ-Algebra bezeichnet man als *Maß* auf $\mathcal{A}$.

**2.6 Definition.** (a) Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ aus einer Menge $X$ und einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $X$ bezeichnet man als *Messraum*. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen *messbar* (bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A}$).

(b) Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aus einer Menge $X$, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $X$ und einem Maß $\mu$ auf $\mathcal{A}$ bezeichnet man als *Maßraum*.

*2.7 Bemerkung.* Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und sind $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq X$ messbar, so ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ messbar mit $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

**2.8 Definition.** Ein *äußeres Maß* auf einer Menge $X$ ist eine Abbildung $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\eta(\emptyset) = 0$.

(b) Für alle $A \subseteq B \subseteq X$ gilt $\eta(A) \leq \eta(B)$.

(c) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen von $X$ gilt $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$.

*2.9 Beispiel.* Die folgende Abbildung ist ein äußeres Maß

$$\eta(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

**2.10 Bezeichnung.** Es sei $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt $\eta$-*messbar*, wenn für jedes $Q \subseteq X$ gilt

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A).$$

*2.11 Bemerkung.* (a) Jedes $A$ mit $\eta(A) = 0$ oder $\eta(X \setminus A) = 0$ ist $\eta$-messbar.

(b) $A$ ist genau dann $\eta$-messbar, wenn für jedes $Q$ gilt $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A)$.

(c) $A$ ist genau dann $\eta$-messbar, wenn für jedes $Q$ mit $\eta(Q) < \infty$ gilt $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A)$.

**2.12 Satz** (Carathéodory 1914). *Ist $\eta\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß, so ist*

$$\mathcal{A}_\eta = \{A \subseteq X \mid \ A \textit{ ist } \eta\textit{-messbar}\}$$

*eine $\sigma$-Algebra, und die Einschränkung von $\eta$ auf $\mathcal{A}_\eta$ ist ein Maß.*

*Insbesondere ist $\eta$-Messbarkeit dasselbe wie Messbarkeit bezüglich $\mathcal{A}_\eta$.*

**2.13 Satz.** *Seien $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von $X$ und $\mu$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Für beliebiges $A \subseteq X$ setze*

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \ \Big| \ \forall k \in \mathbb{N} : B_k \in \mathcal{R},\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Big\}$$

*(dabei $\inf \emptyset = \infty$). Dann ist $\mu^*$ ein äußeres Maß auf $X$ und alle $A \in \mathcal{R}$ sind $\mu^*$-messbar.*

**2.14 Theorem** (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory). *Seien $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von $X$ und $\mu$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Dann kann $\mu$ zu einem Maß auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ fortgesetzt werden.*

**2.15 Definition.** Ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ von Teilmengen von $X$ heißt $\sigma$-endlich, wenn es eine Folge $E_1, E_2, \ldots$ in $\mathcal{R}$ gibt, so dass

(a) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$

(b) $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

(c) $\mu(E_m) < \infty$ für alle $m$.

**2.16 Satz** (Eindeutigkeitssatz). *Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von $X$ und es sei $\mu$ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$. Der im Maßfortsetzungssatz konstruierte Maßraum werde mit $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*)$ bezeichnet. Die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ umfasst, werde mit $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ bezeichnet. Wenn $\nu$ ein Maß auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ ist, so dass $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$, dann gilt $\nu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in A(\mathcal{R})$.*

Bevor ich im übernächsten Abschnitt das Lebesgue-Maß einführe, erwähne ich zwei Maße, die man ohne den Fortsetzungssatz bekommt.

*2.17 Beispiel.* (a) Sei $X$ eine beliebige Menge. Für jede Teilmenge $M$ von $X$ sei $\mu(M)$ die Anzahl der Elemente von $M$. Dann ist $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ ein Maßraum. Das Maß $\mu$ ist das *Zählmaß* auf $X$.

(b) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\delta_a(M) = \begin{cases} 1, & a \in M, \\ 0, & a \notin M. \end{cases}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \delta_a)$ ein Maßraum. Das Maß $\delta_a$ bezeichnet man als *Dirac-Maß.*

# 3. Kompakte Mengen

Wir hatten eine Teilmenge $K$ eines metrischen Raums $X$ als *kompakt* bezeichnet, wenn jede Folge in $K$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $K$ hat.

*Bemerkung.* Wir hatten in der Analysis II gesehen, dass $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn $K$ abgeschlossen und beschränkt ist. (Satz von Heine-Borel).

**3.1 Definition.** Ein System $(U_j)_{j\in J}$ von offenen Teilmengen von $X$ ist eine *offene Überdeckung* von $K$, wenn $K \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

Eine Menge $K$ hat die *endliche Überdeckungseigenschaft*, wenn jede offene Überdeckung von $K$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**3.2 Definition.** Sei $K$ eine Teilmenge eines metrischen Raums $X$. Für $j \in J$ sei $a_j \in K$. Man bezeichnet $(a_j)_{j\in J}$ als $\epsilon$-*Netz* von $K$, wenn $K \subseteq \bigcup_{j\in J} B_\epsilon(a_j)$.

**3.3 Lemma.** *Wenn $K$ kompakt ist, dann hat $K$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein endliches $\epsilon$-Netz.*

**3.4 Definition.** Der *Durchmesser* einer Menge $A \subset X$ ist gleich $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

**3.5 Definition.** Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von $K$. Wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass alle Teilmengen von $K$ mit Durchmesser $< \lambda$ in wenigstens einem $U_j$ enthalten sind, dann bezeichnet man $\lambda$ als *Lebesgue-Zahl* der Überdeckung.

*Beispiel.* Durch $U_0 = ]-\infty, 1[$ und $U_j = ]j - 1, j + \frac{1}{j}[$ für $j \in \mathbb{N}$ wird eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{R}$ gegeben. Sie besitzt weder eine endliche Teilüberdeckung noch eine Lebesguezahl.

**3.6 Satz.** *Für eine Teilmenge $K$ eines metrischen Raums $X$ sind gleichwertig:*

*(a)* $K$ *ist kompakt.*

*(b)* $K$ *besitzt die endliche Überdeckungseigenschaft.*

*(c) Jede offene Überdeckung von $K$ besitzt eine Lebesgue-Zahl, und $K$ besitzt zu jedem $\epsilon > 0$ ein endliches $\epsilon$-Netz.*

*(d) Falls $(A_j)_{j\in J}$ ein System abgeschlossener Mengen in $X$ mit $K \cap \bigcap_{j\in J} A_j = \emptyset$ ist, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\{j_1, \dots, j_n\}$ von $J$, so dass $K \cap \bigcap_{k=1}^{n} A_{j_k} = \emptyset$.*

*Beispiel.* Es sei $X$ irgendeine unendliche Menge, die mit der diskreten Metrik versehen ist

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Dann ist $(\{x\})_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von $X$. Sie besitzt die Lebesguezahl $\frac{1}{2}$, aber $X$ besitzt kein endliches $\epsilon$-Netz, falls $\epsilon < 1$.

# 4. Das Lebesgue-Maß

**4.1 Satz.** *Es gibt genau ein Prämaß* $\lambda_n$ *auf* $\mathcal{F}^n$ *mit*

$$\lambda_n([a,b[) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \quad \text{für alle } [a,b[ \in \mathcal{Q}^n.$$

**4.2 Satz.** *Sei* $\|\cdot\|$ *eine Norm auf dem* $\mathbb{R}^n$ *und sei* $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$. *Für jede offene Menge* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *existieren eine Folge* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *in* $G$ *und eine Folge* $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *positiver Zahlen, so dass*

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{r_j}(a_j).$$

**4.3 Satz.** *Sei* $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n)$ *die von den Figuren erzeugte* $\sigma$*-Algebra. Dann* $\mathcal{A}(\mathcal{F}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

**4.4 Definition.** Sei $\lambda_n$ das in Satz 4.1 auf $\mathcal{F}^n$ erklärte Prämaß, und sei $(\lambda_n)^*$ das zugehörige äußere Maß. Die $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_{(\lambda_n)^*}$ besteht aus den *Lebesgue-messbaren* Mengen. Man bezeichnet sie mit $\mathcal{L}^n$. Die Einschränkung von $(\lambda_n)^*$ auf $\mathcal{L}^n$ wird wieder mit $\lambda_n$ bezeichnet.

*4.5 Bemerkung.* Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit metrischem $X$ und $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, dann bezeichnet man $\mu$ als *Borelmaß.* Das Lebesgue-Maß ist ein Borelmaß.

**4.6 Satz.** *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *beschränkt. Dann sind äquivalent:*

*(a)* $A \in \mathcal{L}^n$.

*(b) Zu jedem* $j \in \mathbb{N}$ *gibt es* $F_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *so dass* $F_j \subseteq A \subseteq G_j$ *und* $\lambda_n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$. *Dabei kann* $G_j$ *als abzählbare Vereinigung von Quadern und* $F_j$ *als abzählbarer Durchschnitt von Figuren gewählt werden.*

*(c) Es gibt* $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $F \subseteq A \subseteq G$ *und* $\lambda_n(G \setminus F) = 0$.

*Im Fall (c) gilt* $\lambda_n(A) = \lambda_n(F) = \lambda_n(G)$.

**4.7 Definition.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Mengen $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ bezeichnet man als *Nullmengen.*

Das Maß $\mu$ ist *vollständig,* wenn alle Teilmengen von Nullmengen $\mu$-messbar sind.

**4.8 Korollar.** *Das Lebesgue-Maß ist vollständig.*

Das hatten wir auch bereits in Bemerkung 2.11 gesehen.

**4.9 Korollar.** *Seien* $-\infty < a_j < b_j < \infty$ *für* $j = 1, \dots, n$. *Sei* $\prod_{j=1}^{n} ]a_j, b_j[ \subseteq M \subseteq \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$. *Dann ist* $M$ *Lebesgue-messbar mit* $\lambda_n(M) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$.

**4.10 Definition.** Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $\tau_a \colon x \mapsto x + a$ die *Translationsabbildung* um den Vektor $a$.

Ein Maß $\mu$ auf dem $\mathbb{R}^n$ heißt *translationsinvariant*, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ und jede messbare Menge $A$ auch $\tau_a(A)$ messbar ist mit $\mu(A) = \mu(\tau_a(A))$.

Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant und das Dirac-Maß ist nicht translationsinvariant.

**4.11 Satz.** *Sei* $\mu$ *ein Maß auf* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

*(a)* $\mu$ *ist translationsinvariant.*

*(b) Es gibt eine beschränkte Menge* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mit nichtleerem Inneren, so dass* $0 < \mu(B) < \infty$.

*Dann gibt es ein* $C > 0$, *so dass* $\mu(A) = C\lambda_n(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

**4.12 Satz.** $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

*4.13 Beispiel* (Vitali). Es gibt eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

# 5. Messbare Abbildungen

**5.1 Definition.** Sein $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *messbar*, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

*5.2 Beispiel.* Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Die *charakteristische Funktion* $\chi_A$ von $A$ ist definiert durch

$$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$\chi_A$ ist genau dann eine messbare Funktion, wenn $A$ eine messbare Menge ist.

**5.3 Satz.** *Seien $X$ und $Y$ metrische Räume und sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$ mit $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Ferner sei $Y$ mit der $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(Y)$ der Borelmengen versehen. Falls $f\colon X \to Y$ stetig ist, so ist $f$ messbar.*

**5.4 Bezeichnung.** (a) Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(b) $\overline{\mathbb{R}}$ wird angeordnet durch

$$x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y, & x, y \in \mathbb{R}, \\ y \neq -\infty, & x = -\infty, \\ x \neq \infty, & y = \infty. \end{cases}$$

Wir schreiben diese Ordnung ebenfalls mit dem Zeichen $<$.

(c) Mit dieser Ordnung ist die folgende Abbildung streng monoton

$$\varphi\colon \overline{\mathbb{R}} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \begin{cases} \arctan(x), & x \in \mathbb{R}, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = -\infty, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \infty. \end{cases}$$

(d) Wir machen $\overline{\mathbb{R}}$ dadurch zu einem metrischen Raum, dass wir verlangen, dass die Abbildung $\varphi$ aus (c) eine Isometrie wird. Mit anderen Worten, wir setzen $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Somit ist die Borel-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erklärt.

**5.5 Lemma.** *$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$, die $\{-\infty\}$ sowie alle halboffenen Intervalle $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, enthält.*

*Beweis.* Es sei $\mathcal{A}$ die kleinste $\sigma$-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$, welche $\{-\infty\}$ sowie alle halboffenen reellen Intervalle enthält. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ zu zeigen.

"$\subseteq$": Halboffene reelle Intervall lassen sich als Differenz zweier in $\overline{\mathbb{R}}$ offener Mengen schreiben. Ferner ist $\{-\infty\}$ abgeschlossen in $\overline{\mathbb{R}}$.

"$\supseteq$": Wegen $\{\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \left(\{-\infty\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} [-j, j[\right)$ liegt auch $\{\infty\}$ in $\mathcal{A}$. Wegen $]a, b[ = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a + \frac{1}{j}, b[$ liegen alle offenen reellen Intervalle in $\mathcal{A}$. Ist nun $G \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ offen in $\overline{\mathbb{R}}$, so ist $H := G \cap \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$. Da $H$ wegen Satz 4.2 als abzählbare Vereinigung offener Intervalle geschrieben werden kann, liegt $H$ in $\mathcal{A}$. Schließlich unterscheidet sich $G$ von $H$ nur durch Hinzufügung einer Teilmenge von $\{-\infty, \infty\}$. Da alle vier Teilmengen Elemente von $\mathcal{A}$ sind, gilt $G \in \mathcal{A}$. $\square$

*5.6 Bemerkung.* Da weder $\infty - \infty$ noch $0 \cdot \infty$ erklärt werden können, erbt $\overline{\mathbb{R}}$ keine der beiden arithmetischen Operationen von $\mathbb{R}$. Allerdings wird $\{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$ duch die offensichtliche Addition zu einem Monoid, also einer Halbgruppe mit neutralem Element.

**5.7 Definition.** Jede Abbildung $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet man als *numerische Funktion.*

Eine numerische Funktion $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, wenn $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar ist.

**5.8 Satz.** *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f$ eine numerische Funktion auf $X$. Dann sind äquivalent:*

*(a)* $f$ *ist messbar.*

*(b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ messbar.*

*(c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ messbar.*

*(d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ messbar.*

*(e) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ messbar.*

**5.9 Satz.** *Seien $f$ und $g$ messbare numerische Funktionen auf $X$. Dann sind die folgenden Mengen messbar*

*(a)* $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$,

*(b)* $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$,

*(c)* $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$,

*(d)* $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$.

**5.10 Satz.** *(a) Seien $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{C})$ und $g\colon (Y, \mathcal{C}) \to (Z, \mathcal{D})$ messbar. Dann ist auch $g \circ f$ messbar.*

(b) *Seien* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ *messbar. Dann sind* $f + g$ *und* $fg$ *messbar.*

**5.11 Definition.** Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup\{a_k \mid k \geq n\}\big) \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf\{a_k \mid k \geq n\}\big) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Da die Folge $(\sup\{a_k \mid k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt, existiert ihr Grenzwert. Für den $\liminf$ argumentiert man genauso.

*5.12 Bemerkung.* Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn $\limsup_{n\to\infty} a_n = a = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

**5.13 Satz.** *Seien* $f_1, f_2, \ldots$ *messbare numerische Funktionen.*

(a) *Die Funktionen* $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *und* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *sind messbar.*

(b) *Die Funktionen* $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *und* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *sind messbar.*

(c) *Wenn die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise in* $\overline{\mathbb{R}}$ *gegen* $f$ *konvergiert, dann ist* $f$ *messbar.*

# 6. Integrationstheorie

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

**6.1 Definition.** Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *nicht-negative Treppenfunktion*, wenn gilt

(a) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$.

(b) $f$ ist messbar.

(c) $f$ nimmt nur endlich viele Werte an.

Mit $\mathcal{T}^+(X)$ bezeichnen wir die Menge der nicht-negativen Treppenfunktionen auf $X$.

*6.2 Bemerkung.* Jedes $f \in \mathcal{T}^+(X)$ lässt sich darstellen als $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0$ und $A_i \in \mathcal{A}$. Die Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ ist unabhängig von der Zerlegung.

**6.3 Definition.** Für $f \in \mathcal{T}^+(X)$, $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$, definiert man das *Integral von* $f$ durch

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i).$$

*Bemerkung.* Wenn $f, g \in \mathcal{T}^+(X)$ mit $f \leq g$, dann $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. Das folgt aus der Unabhängigkeit der Summe $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i)$ von der Zerlegung.

**6.4 Satz.** *Sei* $f$ *eine messbare, nicht-negative, numerische Funktion auf* $X$. *Dann gibt es eine wachsende Folge* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{T}^+(X)$ *mit* $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$.

**6.5 Lemma.** *Seien* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *und* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *zwei monoton wachsende Folgen nicht-negativer Treppenfunktionen auf* $X$ *mit* $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. *Dann*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu.$$

*Insbesondere gilt* $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$, *wenn* $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$.

**6.6 Definition.** Unter $\mathcal{M}^+(X)$ verstehen wir die Menge aller messbaren, nicht-negativen numerischen Funktionen auf $X$. Für $f \in \mathcal{M}^+(X)$ wählen wir eine monoton wachsende Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{T}^+(X)$ mit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ und setzen $\int f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$.

**6.7 Korollar.** *Für* $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ *mit* $f \leq g$ *gilt* $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

**6.8 Bezeichnung.** Für eine numerische Funktion $f$ auf $X$ seien $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = -\min\{f, 0\}$. Dann $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, und $f$ ist genau dann messbar, wenn $f^+$ und $f^-$ messbar sind.

**6.9 Definition.** Eine numerische Funktion $f$ auf $X$ heißt $\mu$-integrierbar, wenn sie messbar ist und $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ endlich sind. In diesem Fall schreiben wir

$$\int f\, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

**6.10 Satz.** *Seien $f$ und $g$ integrierbare numerische Funktionen auf $X$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\alpha f$, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und, falls überall definiert, auch $f + g$ integrierbar. Man hat*

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu \quad \textit{und} \quad \int (f + g) d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

*6.11 Beispiel.* Sei $\mu$ das in Beispiel 2.17 erklärte Zählmaß auf $\mathbb{N}$. Die numerischen Funktionen sind die Folgen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, und diejenigen Folgen mit Werten in $[0, \infty[$, die nur endlich viele Werte annehmen, sind die nicht-negativen Treppenfunktionen. Eine numerische Funktion $f$ auf $\mathbb{N}$ ist genau dann integrierbar, wenn sei weder $\infty$ noch $-\infty$ annimmt und die zugehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. In diesem Fall gilt $\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

**6.12 Definition.** Man sagt, eine Eigenschaft gelte $\mu$-*fast überall*, wenn die Menge aller Punkte, die die Eigenschaft nicht haben, in einer $\mu$-Nullmenge liegt.

*6.13 Beispiel.* Sei $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$. Die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\lambda^1$-fast überall gegen $1$.

**6.14 Satz.** *Für $f \in \mathcal{M}^+(X)$ gilt $\int f\, d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ $\mu$-fast überall.*

*6.15 Beispiel.* Sei $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge. Sei

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in N, \\ 0, & x \notin N. \end{cases}$$

Dann $\int f\, d\mu = 0$.

Das bedeutet $0 \cdot \infty = 0$, wenn $0$ ein Maß und $\infty$ ein Funktionswert ist. Offensichtlich gilt das ebenso, wenn $0$ ein Funktionswert und $\infty$ ein Maß ist. Wenn dagegen — wie in der Analysis I — beide Zahlen Grenzwerte sind, dann hilft weiterhin nur eine feinere Analyse des Wachstumsverhaltens, etwa mittels der Regel von l'Hôpital.

# 7. Das Lebesgue-Integral

**7.1 Bezeichnung.** (a) Das Lebesgue-Integral hat besondere Schreibweisen. Statt

$$\int f \, d\lambda_n$$

schreibt man auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \, dx_2 \dots dx_n.$$

(b) Das Lebesguemaß wird häufig auf Teilmengen eingeschränkt. Ist also $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, so ist $\mathcal{L}^n(Y) = \{X \subseteq Y \mid X \in \mathcal{L}^n\}$ eine $\sigma$-Algebra auf $Y$. Die Einschränkung von $\lambda_n$ auf $\mathcal{L}^n(Y)$ ist ein Maß auf $Y$. Statt $\int f \, d\lambda_n|_Y$ schreibt man $\int_Y f \, d\lambda_n$ oder $\int_Y f(x) d\lambda_n(x)$ oder ähnliches. Beachte

$$\int_Y f(x) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(x) f(x) d\lambda_n(x).$$

Im Unterschied zum Riemann-Integral schreibt man beim Lebesgue-Integral also immer eine Menge an das Integralzeichen.

*7.2 Bemerkung.* Wir wiederholen aus der Analysis I:

(a) Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine *Riemannsche Treppenfunktion,* wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gibt, so dass $f$ auf den Intervallen $]x_{k-1}, x_k[$ konstant ist. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) (x_k - x_{k-1}).$$

Den Raum der Riemannschen Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_R[a, b]$.

(b) Für eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Ober- und Unterintegral wie folgt definiert

$$\int_a^{b*} f(x) dx = \inf\left\{ \int_a^b \psi(x) dx \;\middle|\; \psi \in \mathcal{T}_R[a, b],\ \psi \geq f \right\},$$

$$\int_{a*}^{b} f(x) dx = \sup\left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{T}_R[a, b],\ \varphi \leq f \right\}.$$

(c) Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist *Riemann-integrierbar,* wenn $\int_a^{b\,*} f(x)dx = \int_{a\,*}^{b} f(x)dx$. Den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int_a^b f(x)dx$.

**7.3 Satz.** *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar. Dann ist* $f$ *Lebesgue-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda_1.$$

*Bemerkung.* In Elstrodt, Beispiel IV.6.2 c), wird eine Funktion angegeben, die zwar Riemann-integrierbar, aber nicht Borel-messbar ist.

**7.4 Definition.** Eine *elementare Treppenfunktion* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Form $\sum_{j=1}^m a_j \chi_{Q_j}$ mit $Q_j \in \mathcal{Q}^n$ und $a_j \in \mathbb{R}$. Die Menge aller elementaren Treppenfunktionen bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit $\mathcal{T}_0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet wird.

**7.5 Satz.** *Sei* $f$ *eine* $\lambda_n$*-integrierbare, numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^n$*. Zu jedem* $\epsilon > 0$ *gibt es eine elementare Treppenfunktion* $t$ *mit* $\int |f - t| d\lambda_n < \epsilon$*.*

# 8. Grenzwertsätze

**8.1 Theorem** (Satz über monotone Konvergenz, Satz von Beppo Levi). *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *eine monoton wachsende Folge in* $\mathcal{M}^+(X)$. *Dann*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

*8.2 Beispiel.* Das Wort "wachsend" kann nicht durch "fallend" ersetzt werden. Sei nämlich $f_n = \chi_{[n,\infty)}$. Dann bilden die $f_n$ eine monoton fallende Folge in $\mathcal{M}^+(\mathbb{R})$. Für jedes $n$ gilt $\int f_n d\lambda_1 = \infty$, aber $\int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda_1 = 0$.

**8.3 Satz** (Lemma von Fatou). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathcal{M}^+(X)$. *Dann ist die Funktion* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *in* $\mathcal{M}^+(X)$ *und*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

*8.4 Beispiel.* Sei $f_n(x) = \max\{0, 1-|x-n|\}$. Dann $\int f_n d\lambda_1 = 1$, aber $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ für alle $x$.

**8.5 Theorem** (Satz über majorisierte Konvergenz, Lebesguescher Grenzwertsatz). *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge integrierbarer numerischer Funktionen auf* $X$, *die fast überall punktweise gegen eine messbare, numerische Funktion* $f$ *konvergiert. Es gebe eine integrierbare numerische Funktion* $g$ *auf* $X$, *so dass* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *für alle* $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $f$ *integrierbar und*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

*Es gilt sogar* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$.

*Beispiel.* Beispiel 8.4 zeigt, dass man auf die Majorante nicht verzichten kann.

**8.6 Satz.** *Eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion* $f$ *ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn* $|f|$ *uneigentlich Riemann-integrierbar ist.*

*Bemerkung.* Also ist beispielsweise die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ über $\mathbb{R}$ nicht Lebesgue-integrierbar.

**8.7 Bezeichnung.** Seien $I$ ein offenes Intervall und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wenn

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0}$$

existiert, so schreiben wir $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)$ für den Grenzwert.

Ferner definieren wir für jedes $t \in I$ die Abbildung $f_t\colon X \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = f(t,x)$.

**8.8 Satz.** $f\colon I \times X \to \mathbb{R}$ *habe die folgenden Eigenschaften*

*(a) Für alle* $t \in I$ *ist* $f_t$ *integrierbar.*

*(b) Für alle* $(t,x) \in I \times X$ *existiert* $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.

*(c) Es gibt eine integrierbare, numerische Funktion* $g$ *mit* $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ *für alle* $(t,x) \in I \times X$.

*Definiert man nun* $F\colon I \to \mathbb{R}$ *durch* $F(t) = \int f(t,x)\,d\mu(x)$, *so gelten*

*(1)* $F$ *ist differenzierbar.*

*(2)* $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_t\colon X \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar für jedes* $t \in I$.

*(3)* $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x)$ *für jedes* $t \in I$.

*8.9 Beispiel.* Sei $f(t) \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(tx)\,dx$. Aus dem Satz folgt mittels partieller Integration

$$f'(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\sin(xt)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{2}e^{-x^2}\cos(xt)\,dx = -\frac{t}{2}f(t).$$

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen wissen wir nun, dass

$$f(t) = Ce^{-t^2/4} \quad \text{für } C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Wir werden in einem der nächsten Kapitel zeigen, dass $C = \sqrt{\pi}$.

# 9. Der Satz von Fubini

In diesem Kapitel sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n+m = N$. Die Elemente des $\mathbb{R}^N$ werden häufig als Paare $(x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ geschrieben.

**9.1 Bezeichnung.** Für $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$\begin{aligned} E_x &= \{\eta \in \mathbb{R}^m \mid (x, \eta) \in E\}, \\ E^y &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid (\xi, y) \in E\}. \end{aligned}$$

**9.2 Satz.** *Sei* $E \in \mathcal{L}^N$. *Dann gibt es eine Lebesgue-Nullmenge* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *so dass*

*(a) Für jedes* $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ *ist* $E_x \in \mathcal{L}^m$.

*(b) Die numerische Funktion*

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda_m(E_x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \\ 0, & x \in A, \end{cases}$$

*ist auf* $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue-messbar.*

*(c)* $\lambda_N(E) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} \lambda_m(E_x) \, d\lambda_n(x)$.

*Entsprechendes gilt, wenn man* $x$ *und* $y$ *vertauscht.*

**9.3 Korollar** (Cavalierisches Prinzip). *Seien* $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *mit* $\lambda_m(E_x) = \lambda_m(F_x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$. *Dann* $\lambda_N(E) = \lambda_N(F)$.

**9.4 Korollar.** $E \in \mathcal{L}^N$ *ist genau dann eine Nullmenge, wenn*

$$\lambda_m(E_x) = 0 \qquad \lambda_n\text{-}f.ü.$$

**9.5 Bezeichnung.** Wenn $A$ eine Lebesgue-Nullmenge und $g$ eine Lebesgue-messbare numerische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist, dann gibt es eine Lebesgue-messbare numerische Funktion $\widetilde{g}$ auf dem $\mathbb{R}^n$, die in $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit $g$ übereinstimmt. Da $\int \widetilde{g} \, d\lambda_n$ nur von $g$ abhängt, setzen wir

$$\int g \, d\lambda_n = \int \widetilde{g} \, d\lambda_n.$$

Mit dieser Setzung liest sich Aussage (c) des Satzes wie folgt

(c′) $\lambda_N(E) = \int \lambda_m(E_x) d\lambda_n(x)$.

*9.6 Beispiel.* Sei $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ der Einheitskreis. Nach Cavalieri erhalten wir

$$\lambda_2(E) = 2\int_{[-1,1]} \sqrt{1-y^2}d\lambda_1(y) = 4\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy = 4\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = \pi.$$

**9.7 Satz** (Tonelli). *Sei $f$ eine nicht-negative, Lebesgue-messbare, numerische Funktion auf dem $\mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgue-messbar ist. Ferner ist die numerische Funktion $g(y) = \int f(x,y)d\lambda_n(x)$ auf $\mathbb{R}^m \setminus A$ Lebesgue-messbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)d\lambda_N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)d\lambda_m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\lambda_n(x)\right)d\lambda_m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\lambda_m(y)\right)d\lambda_n(x).\end{aligned}$$

**9.8 Theorem** (Fubini). *Sei $f$ eine Lebesgue-integrierbare numerische Funktion auf dem $\mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Lebesgue-Nullmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m$, so dass für jedes $y \in \mathbb{R}^m \setminus A$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ Lebesgue-integrierbar ist. Ferner ist die numerische Funktion $g(y) = \int f(x,y)d\lambda_n(x)$ auf $\mathbb{R}^m \setminus A$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)d\lambda_N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)d\lambda_m(y) &= \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\lambda_n(x)\right)d\lambda_m(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\lambda_m(y)\right)d\lambda_n(x).\end{aligned}$$

*Bemerkung.* In der Praxis zeigt man die Intergrierbarkeit von $f$ erst mit dem Satz von Tonelli und berechnet dann den Integralwert mit dem Satz von Fubini.

*9.9 Beispiel.* Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > y,\\ -\frac{1}{y^2}, & x \leq y.\end{cases}$$

Den Graphen von $f$ zeigt Abbildung 9.1.

Für festes $y \in [0,1]$ gilt

$$\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda_1(x) = -\int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{y} = -1.$$

Dagegen gilt für festes $x \in [0,1]$

$$\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda_1(y) = \int_0^x \frac{1}{x^2}dy - \int_x^1 \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} = 1.$$

Daher $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) = -1$ und $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda_1(y)\, d\lambda_1(x) = 1$. Wegen des Satzes von Fubini folgt, dass $f$ nicht integrierbar ist.

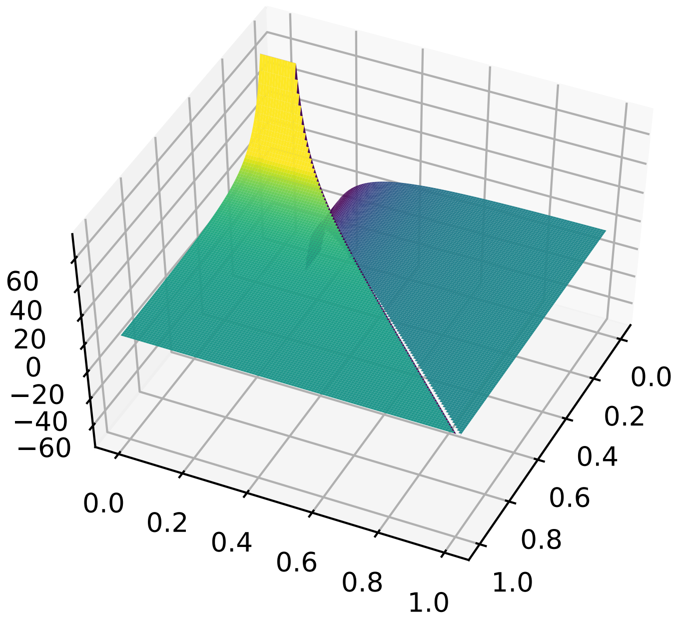


Abbildung 9.1.: Graph der Funktion aus Beispiel 9.9

*9.10 Beispiel.* Betrachte für $R > 0$ die Funktion $f\colon [0,R] \times [0,\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-xy}\sin(x)$. Diese Funktion ist stetig, also messbar. Es gilt $|f(x,y)| \leq xe^{-xy}$, also nach Tonelli

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty[} |f(x,y)|\,d\lambda_2 \leq \int_{[0,R]\times[0,\infty[} xe^{-xy}\,d\lambda_2 = \int_0^R \int_0^\infty xe^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^R 1\,dy = R.$$

Also kann der Satz von Fubini angewandt werden

$$\int_{[0,R]\times[0,\infty[} f(x,y)\,d\lambda_2 = \int_0^R \int_0^\infty \sin(x)e^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

da uns die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals bereits aus der Analysis I bekannt ist.

Andererseits ist für festes $y$ die Funktion $x \mapsto -\frac{e^{-xy}}{y^2+1}(y\sin(x)+\cos(x))$ eine Stammfunktion von $x \mapsto e^{-xy}\sin(x)$. Daher

$$\begin{aligned}\int_{[0,R]\times[0,\infty[} f(x,y)\,d\lambda_2 &= \int_0^\infty \int_0^R \sin(x)e^{-xy}\,dx\,dy \\ &= \int_{[0,\infty[} \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{e^{-Ry}}{y^2+1}(y\sin(R)+\cos(R)\right)\,d\lambda_1(y).\end{aligned}$$

Für genügend großes C ist $\frac{C}{y^2+1}$ eine Majorante des Integranden. Wir erhalten also aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[0,R]\times[0,\infty[} f(x,y)\,d\lambda_2 = \int_{[0,\infty[} \frac{1}{y^2+1}\,d\lambda_1(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben gezeigt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

*Bemerkung.* Die Sätze von Fubini und Tonelli gelten auch in allgemeineren Situationen. Die Hauptschwierigkeit besteht dabei in der Konstruktion des Produktmaßes.

# 10. Die Transformationsformel

Für eine Abbildung $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^m$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, hatten wir mit $D\Phi(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Jacobi-Matrix bezeichnet. Sie besteht aus den partiellen Ableitungen der Komponenten von $\Phi$. Ein $C^1$-Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$ ist eine bijektive $C^1$-Abbildung, deren Inverse ebenfalls von der Klasse $C^1$ ist; das ist nur möglich für $n = m$.

Auf dem $\mathbb{R}^{n\times n}$ verwenden wir in diesem Abschnitt die Matrixnorm, die zur Supremumsnorm gehört, also

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_\infty.$$

Mit $E_n$ bezeichnen wir die $n \times n$-Einheitsmatrix.

**10.1 Definition.** (a) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $M$ invertierbar ist mit $M^T = M^{-1}$. (Hierbei ist $M^T$ die Transponierte von $M$.) Die Gruppe aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen wird mit $O(n)$ bezeichnet.

(b) Die Gruppe aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper $k$ wird mit $GL_n(k)$ bezeichnet.

Aus der Linearen Algebra weiß man:

**10.2 Satz.** *Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann orthogonal, wenn die durch $v \mapsto Mv$ gegebene Abbildung längenerhaltend bezüglich der euklidischen Norm ist.*

**10.3 Lemma.** *Jede Matrix $M \in GL_n(\mathbb{R})$ lässt sich schreiben als $M = S_1DS_2$, wobei $S_1, S_2$ orthogonale Matrizen und $D$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen sind.*

**10.4 Lemma.** *Sei $T \in O(n)$. Dann $T(M) \in \mathcal{L}^n$ und $\lambda_n(T(M)) = \lambda_n(M)$ für alle $M \in \mathcal{L}^N$.*

**10.5 Lemma.** *Sei $T \in GL_n(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Dann $T(M) \in \mathcal{L}^n$ und $\lambda_n(T(M)) = \det(T)\lambda_n(M)$ für alle $M \in \mathcal{L}^N$.*

**10.6 Satz.** *Sei $T \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann $T(M) \in \mathcal{L}^n$ und $\lambda_n(T(M)) = |\det(T)|\lambda_n(M)$ für alle $M \in \mathcal{L}^n$.*

**10.7 Satz.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $T \in GL_n(\mathbb{R})$, und sei $V := T(U)$.*

(a) *Ist* $A \subseteq U$ *Lebesgue-messbar, so gilt*

$$\lambda_n(T(A)) = \int_A |\det(T)| d\lambda_n.$$

(b) *Ist* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so ist auch* $f \circ T$ *integrierbar.*

(c) *Ist* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *integrierbar, so gilt*

$$\int_{T(U)} f(y) d\lambda_n(y) = \int_U f(Tx)|\det(T)| d\lambda_n(x).$$

**10.8 Lemma.** *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* $C^1$*-Diffeomorphismus. Für jede Borelmenge* $M \subseteq U$ *ist* $\Phi(M)$ *eine Borelmenge.*

**Bezeichnung.** Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit $W(a, r)$ den halboffenen Würfel $[a - r, a + r[ = \prod_{j=1}^n [a_j - r, a_j + r[$. Bezeichnet man die offene $r$-Kugel um $a$ in der $\infty$-Norm mit $B_r^\infty(a)$, so gilt $B_r(a) \subset W(a, r) \subset \overline{B}_r^\infty(a)$.

**10.9 Lemma.** *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $W(a, r) \subseteq U$ *ein halboffener Würfel und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* $C^1$*-Diffeomorphismus, für welchen ein* $\epsilon \in ]0, 1[$ *existiert, so dass* $\|D\Phi(x) - E_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ *für alle* $x \in W(a, r)$*. Dann gilt für jedes* $\delta \leq r$

$$\Phi(W(a, \delta)) \subseteq W(\Phi(a), (1 + \epsilon)\delta).$$

**10.10 Lemma.** *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* $C^1$*-Diffeomorphismus. Sei* $Q$ *ein achsenparalleler Quader mit* $\overline{Q} \subset U$*. Dann*

$$\lambda_n(\Phi(Q)) \leq \int_Q |\det(D\Phi(x))| d\lambda_n(x).$$

**10.11 Definition.** Sei $X$ ein metrischer Raum.

(a) Für jedes $A \subset X$ mit $\emptyset \neq A$ wird die *Distanzfunktion* gegeben durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

(b) Sei $U \subseteq X$ offen. Ein *kompakte Ausschöpfung* von $U$ besteht aus einer Folge $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq U$ kompakter Mengen, so dass $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = U$.

**10.12 Lemma.** (a) *Für* $x, y \in X$ *gilt* $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) *Jede offene Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *besitzt eine kompakte Ausschöpfung.*

**10.13 Lemma.** *Für* $\Phi$ *wie in Lemma 10.10 sei* $M \subseteq U$ *Lebesgue-messbar. Dann ist* $\Phi(M)$ *Lebesgue-messbar mit*

$$\lambda_n(\Phi(M)) \leq \int_M |\det(D\Phi(x))|\, d\lambda_n(x).$$

**10.14 Satz** (Transformationssatz). *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\Phi\colon U \to V$ *ein* $C^1$*-Diffeomorphismus.*

*(a) Ist* $A \subseteq U$ *Lebesgue-messbar, so gilt*

$$\lambda_n(\Phi(A)) = \int_A |\det(D\Phi(x))| \, d\lambda_n(x).$$

*(b) Eine Lebesgue-messbare, numerische Funktion* $f$ *auf* $V$ *ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn* $|\det(D\Phi)| \cdot (f \circ \Phi)$ *Lebesgue-integrierbar ist.*

*(c) In diesem Fall gilt*

$$\int_V f(y) d\lambda_n(y) = \int_U f(\Phi(x)) \, |\det(D\Phi(x))| \, d\lambda_n(x).$$

**10.15 Satz** (Ebene Polarkoordinaten). *Ist* $f$ *eine Lebesgue-messbare, numerische Funktion auf dem* $\mathbb{R}^2$*, so ist* $f$ *genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn die Funktion* $(r, t) \mapsto r\, f(r\cos(t), r\sin(t))$ *über* $[0, \infty[ \times [0, 2\pi[$ *Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\infty[} f(r\cos(t), r\sin(t)) r \, dr \, dt.$$

*10.16 Beispiel.*

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dx \, dy \\ &= \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\infty)} e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} \, r \, dr = 2\pi \, \frac{-1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

*10.17 Bemerkung* (Kugelkoordinaten). In der Analysis II werden Kugelkoordinaten eingeführt: Für $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty[ \times ]{-\pi}, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist

$$\Psi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Man rechnet sofort nach, dass $\det(D\Psi(r, \varphi, \theta)) = r^2 \cos\theta$. Also folgt aus dem Transformationssatz, dass eine Lebesgue-messbare, numerische Funktion $f$ auf dem $\mathbb{R}^3$ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn die Funktion

$$g\colon [0, \infty[ \times ]{-\pi}, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad (r, \varphi, \theta) \mapsto f(\Psi(r, \varphi, \theta)) r^2 \cos\theta,$$

Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{[0,2\pi]}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\int_{[0,\infty[} f(\Psi(r,\varphi,\theta))r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Die Transformationsformel benötigt allerdings noch Zusatzüberlegungen, weil $\Phi$ nur auf $U := \,]0,\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ein Diffeomorphismus ist. Die fehlenden Stücke sind aber eine Nullmenge:

$$\mathbb{R}^3 \setminus \Phi(U) = \{(0,0,0)\} \cup (]-\infty,0] \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})\,.$$

*10.18 Beispiel.* Wir berechnen das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel $K_3$. Es gilt

$$\lambda_3(K_3) = \int_{[0,2\pi]}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\int_{[0,1]} r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_{[0,2\pi]}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \frac{1}{3}\cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi$$
$$= \frac{2}{3}\int_{[0,2\pi]} d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

*10.19 Bemerkung* (Rotationskörper). Für ein Intervall $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und messbare Funktionen $R_1, R_2 \colon I \to [0,\infty[$ mit $R_1 \leq R_2$ wird ein *Rotationskörper* definiert durch

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| z \in I,\ R_1(z) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2(z)\right\}.$$

Wir bestimmen sein Volumen durch die Einführung von *Zylinderkoordinaten*

$$\Phi\colon [0,\infty[\,\times\,[0,2\pi[\,\times\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Es gilt

$$D\Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Also $\det(D\Phi(r,\varphi,z)) = r$. Weil $B = \Phi(A)$ für

$$A = \{(r,\varphi,z) | z \in I,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ R_1(z) \leq r \leq R_2(z)\},$$

sagt der Transformationssatz zusammen mit dem Satz von Tonelli

$$\lambda_3(B) = \int_A r\,d\lambda_3(r,\varphi,z) = \int_a^b \int_0^{2\pi}\int_{R_1(z)}^{R_2(z)} r\,dr\,d\varphi\,dz = \pi\int_a^b \left(R_2^2(z) - R_1^2(z)\right)\,dz.$$

*10.20 Beispiel.* Wir hatten im Tutorium das Volumen des Kreiskegels

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{x^2+y^2} \leq R - z\right\}$$

mittels des Satzes von Cavalieri berechnet. Da er ein Rotationskörper mit $I = [0,R]$, $R_1 \equiv 0$ und $R_2(z) = R - z$ ist, kann man ebensogut die Bemerkung anwenden.

$$\lambda_3(K) = \pi\int_0^R (R-z)^2\,dz = \frac{\pi}{3}R^3.$$

# 11. $L^p$-Räume

Es sei wieder $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

**11.1 Bezeichnung.** Für $p \geq 1$ und eine messbare, numerische Funktion $f$ auf $X$ definieren wir

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

**11.2 Lemma.** *Für* $a, b > 0$ *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

**11.3 Satz** (Höldersche Ungleichung). *Für messbare, numerische Funktionen* $f, g$ *auf* $X$ *und* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**11.4 Korollar** (Cauchy-Schwarz Ungleichung).

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

*für messbare, numerische Funktionen* $f$ *und* $g$.

**11.5 Satz** (Minkowskische Ungleichung). *Seien* $f, g$ *messbare, numerische Funktionen auf* $X$. *Dann gilt für jedes* $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**11.6 Satz.** *Für* $1 \leq p < \infty$ *bestehe* $\mathscr{L}^p(\mu)$ *aus allen messbaren, numerischen Funktionen* $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, *für welche* $\|f\|_p < \infty$. *Ferner sei*

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathscr{L}^p(\mu) | f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

*Dann wird*

$$L^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$$

*durch*

$$(f + \mathcal{N}) + (g + \mathcal{N}) = (f + g) + \mathcal{N},$$
$$\|f + \mathcal{N}\|_p = \|f\|_p$$

*zu einem normierten Raum.*

*11.7 Bemerkung.* (a) Man geht mit den Elementen von $L^p(\mu)$ so um, als seien es Funktionen, muss aber beachten, dass diese Funktionen auf Nullmengen unbestimmt sind. Beispielweise ist eine Funktion $f$ genau dann $\mu$-integrierbar, wenn $f \in L^1(\mu)$.

(b) Wenn $\mu$ das Lebesguemaß auf $X$ ist, dann schreibt man $L^p(X)$ anstelle von $L^p(\lambda_n|_X)$.

**11.8 Satz.** *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $L^p(\mu)$. *Dann gibt es eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *die sowohl in* $L^p(\mu)$ *als auch* $\mu$*-fast überall punktweise konvergiert.*

**11.9 Lemma.** *Sei* $E$ *ein normierter Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in* $E$. *Falls die Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt, so besitzt sie genau einen Häufungspunkt und konvergiert gegen ihn.*

Zur Erinnerung: Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum, also einer, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.

**11.10 Satz** (Riesz-Fischer). $L^p(\mu)$ *ist ein Banachraum.*

**11.11 Definition.** Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $E$ ist eine Abbildung $\langle\cdot,\text{-}\rangle\colon E\times E\to\mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) $\langle\lambda x+\mu y,z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\mu\langle y,z\rangle$ für alle $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $x,y\in E$,

(S2) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ für alle $x,y\in E$,

(S3) $\langle x,x\rangle\geq 0$ für alle $x\in E$ und $\langle x,x\rangle=0$ genau für $x=0$.

Ein Banachraum mit einer Norm von der Form $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, wobei $\langle\cdot,-\rangle$ ein Skalarprodukt ist, ist ein *Hilbertraum.*

*11.12 Bemerkung.* (a) Der $L^2(\mu)$ wird durch das folgende Skalarprodukt zu einem Hilbertraum

$$\langle f,g\rangle=\int fg\,d\mu.$$

(b) Das geht auch komplexwertig: Zuerst definiert man für $f\colon X\to\mathbb{C}$ das Integral

$$\int f\,d\mu=\int \mathrm{Re}(f)\,d\mu+i\int \mathrm{Im}(f)\,d\mu.$$

Damit definiert man das Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle=\int f\overline{g}\,d\mu$$

auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$L^2(\mu,\mathbb{C})=\big\{f\colon X\to\mathbb{C}\;\big|\;\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)\in L^2(\mu)\big\}.$$

(c) Zwei Elemente $x$ und $y$ eines Hilbertraums stehen *senkrecht* aufeinander, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

(d) Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir $e_n \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ durch $e_n(x) = e^{inx}$. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$ stehen $e_n$ und $e_m$ senkrecht aufeinander.

(e) Umgekehrt gilt: Die einzige Funktion $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, die auf allen $e_n$, $n \in \mathbb{Z}$, senkrecht steht, ist die Nullfunktion. Diese Aussage ist der Grundstein der Theorie der Fourierreihen. Wir zeigen sie jetzt nicht.

# 12. Die Faltung

**12.1 Lemma.** *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist die Funktion* $(x, y) \mapsto f(x)g(y - x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ *und für fast alle* $y \in \mathbb{R}^n$ *ist die Funktion* $x \mapsto f(x)g(y - x)$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

**12.2 Definition.** Die Verknüpfung

$$*\colon L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad (f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y - x)d\lambda^n(x),$$

bezeichnet man als *Faltungsprodukt.*

**12.3 Satz.** *Für* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. *Insbesondere* $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

*12.4 Beispiel.* Für $A > 0$ sei $f = \frac{1}{A}\chi_{[0,A]}$. Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Faltung

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y - x)d\lambda^1(x) = \frac{1}{A}\int_{[0,A]} g(y - x)d\lambda^1(x)$$

gleich dem *gleitenden Durchschnitt* von $g$.

**12.5 Lemma.** *Das Faltungsprodukt ist kommutativ.*

**12.6 Definition.** (a) Sei $X$ ein metrischer Raum und sei $f \in C(X)$. Die Menge

$$\operatorname{Supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

ist der *Träger* von $f$.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}_0$ oder $k = \infty$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$C_c^k(G) = \{f \in C^k(G) \mid \operatorname{Supp}(f) \text{ kompakt}\}$$

ist der Raum der Funktionen der Klasse $C^k$ mit kompaktem Träger.

*12.7 Beispiel.* Wir hatten in Bemerkung 15.8 der Analysis I gesehen, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

von der Klasse $C^\infty$ ist. Setze $A = \int_{\mathbb{R}} f(x)f(1 - x)d\lambda_1(x)$. Dann liegt die Funktion $g(x) = \frac{1}{A}f(x)f(1 - x)$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ihr Träger ist $\operatorname{Supp}(g) = [0, 1]$. Außerdem ist $g$ nicht-negative und $\int g \, d\lambda^1 = 1$.

**12.8 Satz.** *Sei* $k \in \mathbb{N}_0$ *oder* $k = \infty$, *sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und sei* $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. *Dann* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt für* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *mit* $|\alpha| \leq k$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f * g)}{\partial y^\alpha} = f * \left(\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial y^\alpha}\right).$$

# Teil II.

# Vektoranalysis

# 13. Die Hausdorff-Dimension

Beim Beweis der Transformationsformel hatte wir den halboffenen Würfel $W(a, r) = \prod_{j=1}^{n} [a_j - r, a_j + r[$ definiert.

**13.1 Definition.** (a) Für $\delta > 0$ ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine *δ-Nullmenge im Sinne von Hausdorff,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Folgen $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$ und $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $]0, \infty[$ gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} W(a_j, r_j) \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} r_j^{\delta} < \epsilon.$$

Die Menge aller Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, welche δ-Nullmengen im Sinne von Hausdorff sind, bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_{\delta}(\mathbb{R}^n)$.

(b) $M$ hat die *Hausdorff-Dimension* $d$, wenn $M$ für jedes $\delta > d$, aber für kein $\delta < d$ eine δ-Nullmenge ist.

**13.2 Lemma.** *(a) Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\delta_1$-Nullmenge und sei $\delta_2 > \delta_1$. Dann ist $N$ auch eine $\delta_2$-Nullmenge.*

*(b) Die abzählbare Vereinigung von δ-Nullmengen ist eine δ-Nullmenge.*

**13.3 Satz.** *Die Hausdorff-Dimension von $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^N$ ist $n$.*

*13.4 Bemerkung.* Sei $M \subset \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Dann $M \in \mathcal{H}^{n+1}(\mathbb{R}^m)$. Das wird in einer Übungsaufgabe gezeigt.

**13.5 Satz.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\Phi \colon U \to V$ ein $C^1$-Diffeomorphismus, und sei $N \subset U$ eine δ-Nullmenge im Sinne von Hausdorff. Dann gilt dies auch für $\Phi(N)$.*

# 14. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

**14.1 Definition.** Sei $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt $n$-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^N$ der Klasse $C^p$, wenn es für jedes $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^N$ von $a$ und eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^{N-n}$ von der Klasse $C^p$ gibt, so dass

(a) $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$,

(b) $\mathrm{Rang}(Df(a)) = N - n$.

*14.2 Bemerkung.* $\mathrm{Rang}(Df(a)) = N - n$ bedeutet, dass die lineare Abbildung

$$Df(a)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$$

surjektiv ist. Das ist äquivalent dazu, dass es eine $(N-n)\times(N-n)$-Unterdeterminante von $Df(a)$ gibt, die nicht verschwindet.

**14.3 Satz.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

*(a) $M$ ist eine $n$-dimensionale $C^p$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$.*

*(b) Für jedes $a \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^N$ von $a$, eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^N$ und ein $C^p$-Diffeomorphismus $h\colon U \to V$ mit*

$$h(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

**14.4 Definition.** Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^N$ von der Klasse $C^1$. Falls $\mathrm{Rang}\, D\varphi(x) = n$ für alle $x \in W$, so ist $\varphi$ eine *Immersion.*

Der Begriff der Immersion verallgemeinert also den Begriff des lokalen $C^1$-Diffeomorphismus auf den Fall unterschiedlicher Dimensionen in Quell- und Zielraum.

**14.5 Definition.** Seien $X$, $Y$ zwei metrische Räume. Eine bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ stetig sind. Wenn es einen Homöomorphismus zwischen $X$ und $Y$ gibt, so sind die beiden Räume *homöomorph.*

**14.6 Satz.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$. Dann sind äquivalent:*

*(a) $M$ ist eine $n$-dimensionale $C^p$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.*

(b) *Für jedes* $a \in M$ *existieren eine offene Umgebung* $U \subseteq M$ *von* $a$ *in* $M$, *eine offene Teilmenge* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *und eine homöomorphe Abbildung* $\varphi\colon U \to V$, *so dass* $\varphi^{-1}$ *eine Immersion von der Klasse* $C^p$ *ist.*

**14.7 Definition.** Jedes solche $\varphi$ ist eine *Karte* von $M$. Eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten ist ein *Atlas* der Untermannigfaltigkeit $M$, wenn jeder Punkt aus $M$ im Definitionsbereich wenigstens einer Karte aus $\mathcal{A}$ liegt.

Wenn $\varphi\colon U \to V$ mit $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, dann bezeichnet man $\varphi^{-1}$ als *lokale Parametrisierung* von $M$.

Wir wiederholen aus der Analysis II:

**14.8 Theorem** (Umkehrsatz). *Es sei* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *und es sei* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *von der Klasse* $C^k$. *Es sei* $a \in D$ *ein Punkt, für den* $Df(a)$ *invertierbar ist. Dann gibt es Umgebungen* $V$ *von* $a$ *und* $U$ *von* $f(a)$, *so dass* $f\colon V \to U$ *bijektiv ist. Bezeichnet man mit* $g\colon U \to V$ *ihre Inverse, so ist* $g$ *von der Klasse* $C^k$, *und es gilt*

$$Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1}.$$

**14.9 Theorem** (Satz über implizite Abbildungen). *Seien* $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ *und* $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen und seien* $x_0 \in U_1$, $y_0 \in U_2$. *Sei* $F\colon U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ *von der Klasse* $C^p$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *mit* $F(x_0, y_0) = 0$. *Ferner sei die Matrix* $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ *invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung* $U \subseteq U_1$ *von* $x_0$, *eine Umgebung* $V \subseteq U_2$ *von* $y_0$ *und eine Abbildung* $g\colon U \to V$ *von der Klasse* $C^p$ *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $F(x, g(x)) = 0$ *für alle* $x \in U$.

(b) *Wenn* $F(x, y) = 0$ *für* $(x, y) \in U \times V$, *dann* $y = g(x)$.

*Es gilt*

$$Dg(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right).$$

*14.10 Beispiel.* Die Kugelkoordinaten, eingeschränkt auf $r = 1$, definieren eine Karte der $S^2$, deren Definitionsbereich die Menge $\{(x, y, z) \in S^2 \mid y \neq 0 \text{ oder } x > 0\}$ ist. Analog kann man Kugelkoordinaten schaffen, deren Definitionsbereich die Menge $\{(x, y, z) \in S^2 \mid z \neq 0 \text{ oder } x < 0\}$ ist. In Kaballo, Aufgabe 21.2, werden Polarkoordinaten für beliebige Dimension erklärt. Daraus erhält man sofort einen Atlas für die $S^{n-1}$. Abbildung 14.1 zeigt die jeweils ausgelassenen Kurven.

Für die Sphäre $S^{n-1}$ gibt es aber auch einfacher zu konstruierende Karten. Wir setzen dazu $S^{n-1}_{j,\pm} = \{x \in S^{n-1} \mid \pm x_j > 0\}$ und

$$\varphi_{j,\pm}\colon S^{n-1}_{j,\pm} \to B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad x \mapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Die Inverse ist dann

$$\begin{aligned}\psi_{j,\pm}&(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\\ &= \left(x_1,\dots,x_{j-1},\pm\sqrt{x_1^2+\dots+x_{j-1}^2+x_{j+1}^2+\dots,x_n^2},x_{j+1},\dots,x_n\right).\end{aligned}$$

Abbildung 14.2 zeigt die sechs Karten, aus denen dieser Atlas der $S^2$ besteht.

**14.11 Definition.** Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ein Punkt $x_0 \in \partial G$ heißt $C^k$-*regulärer Randpunkt* von $G$, wenn es eine offene Umgebung $U$ von $x_0$ und eine Funktion $\rho \in C^k(U)$ gibt, so dass $\nabla\rho(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ und $G \cap U = \{x \in U | \rho(x) < 0\}$.

**14.12 Satz.** *Wenn $x_0 \in \partial G$ ein $C^k$-regulärer Randpunkt mit $\frac{\partial\rho}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$ ist, so gibt es eine offene Menge*[1] $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *und ein offenes Intervall $I$, so dass $x_0 \in V \times I$, und eine $C^k$-Funktion $\psi\colon V \to I$, so dass*

$$\partial G \cap V \times I = \{(\xi, \psi(x)) | \xi \in V\}$$

*und entweder*

$$G \cap V \times I = \{(\xi, x_n) \in V \times I | x_n < \psi(\xi)\} \text{ oder } G \cap V \times I = \{(\xi, x_n) \in V \times I | x_n > \psi(\xi)\}.$$

*Speziell ist $C_r^k(G)$ eine $C^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.*

**14.13 Definition.** (a) Die Menge aller $C^k$-regulären Randpunkte von $G$ bezeichnen wir als *regulären $C^k$-Rand* von $G$ und schreiben $\partial_r^k(G)$ dafür. Die Menge $\partial_s^k(G) := \partial G \setminus \partial_r^k G$ ist der *singuläre $C^k$-Rand.*

(b) Eine beschränkte, offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *$C^k$-Polyeder,* falls $\partial_r^k G$ dicht in $\partial G$ ist und $\partial_s^k G$ eine $n-1$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff ist. Die Menge aller $C^k$-Polyeder im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^n)$.

*14.14 Beispiel.* Offene Quader sind $C^\infty$-Polyeder. Offene, euklidische Kugeln ebenfalls.

[1] Für AG: Bei Kaballo ist $V$ ein Rechteck. In Hinblick auf Lemma 18.10 ist das klüger.

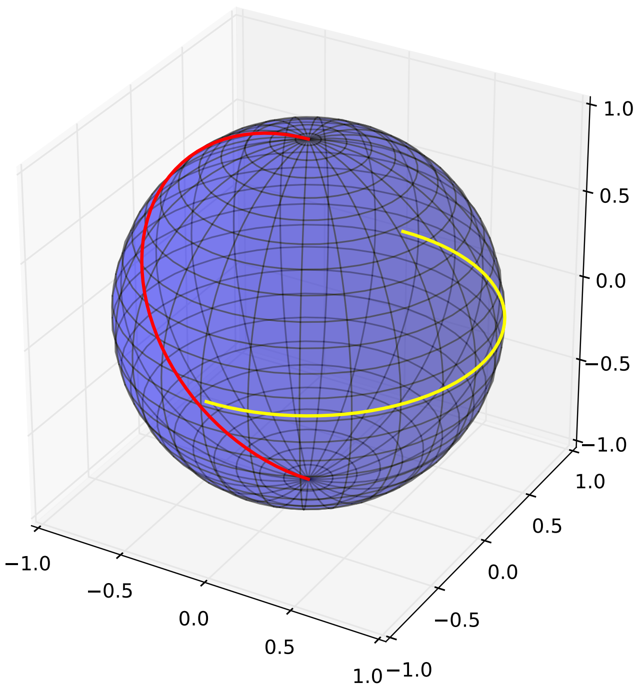


Abbildung 14.1.: Atlas der $S^2$ mit Kugelkoordinaten

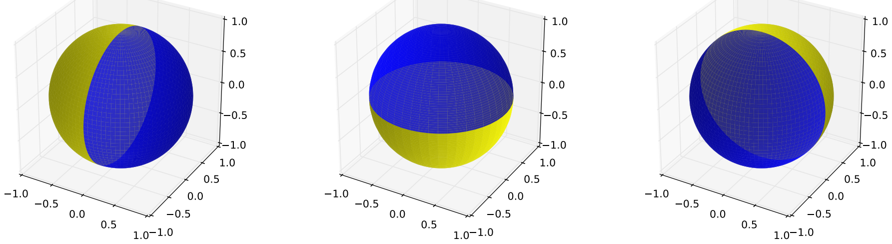

Abbildung 14.2.: Atlas der $S^2$ aus Graphen

# 15. Tangentialräume und Extrema unter Nebenbedingungen

**15.1 Definition.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ und sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt *Tangentialvektor* an $M$ in $a$, falls es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine $C^1$-Abbildung $\psi\colon I \to M$ gibt mit $\psi(0) = a$ und $\psi'(0) = v$.

Die Menge $T_a(M)$ aller Tangentialvektoren an $M$ in $a$ bezeichnet man als den *Tangentialraum* an $M$ in $a$.

*15.2 Beispiel.* Sei $N = (0, 0, 1)$ der Nordpol der $S^2$ und sei $v$ ein Vektor der Form $v = (x, y, 0)$. Dann $v \in T_N(S^2)$.

**15.3 Satz.** *Sei $M$ eine $n$-dimensionale $C^p$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$, sei $a \in M$. Laut Definition der Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung $U$ von $a$ und eine Abbildung $g\colon U \to \mathbb{R}^{N-n}$ von der Klasse $C^p$ mit $M \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ und $\operatorname{Rang}(Dg(a)) = N - n$.*

*Nach Satz 14.6 gibt es eine lokale Parametrisierung $\psi\colon W \to M$ und $b \in W$ mit $\psi(b) = a$.*

*Mit diesen Abbildungen gilt*

$$\{D\psi(b)y \mid y \in \mathbb{R}^n\} = T_a(M) = \{v \in \mathbb{R}^N \mid Dg(a)v = 0\}.$$

**15.4 Korollar.** *Der Tangentialraum $T_a(M)$ an eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist ein $n$-dimensionaler Vektorraum.*

**15.5 Definition.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und sei $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^N$ mit $g(a) = 0$ heißt lokales Maximum von $f$ unter der *Nebenbedingung* $g(x) = 0$, wenn es eine Umgebung $V$ von $a$ gibt, so dass $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in V$ mit $g(x) = 0$.

**15.6 Satz** (Methode der Lagrange-Multiplikatoren). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und sei $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung von der Klasse $C^1$ mit $\operatorname{Rang} D(g(x)) = m$ für alle $x \in U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion von der Klasse $C^1$. Ist $a$ ein lokales Maximum von $f$ unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit*

$$\nabla f(a) + \lambda_1 \nabla g_1(a) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(a) = 0.$$

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ bezeichnet man als *Lagrangesche Multiplikatoren.*

*Bemerkung.* Dieser Satz gilt genauso für lokale Minima. Die Funktion $f$ bezeichnet man als *Zielfunktion,* die Gleichung $g(x) = 0$ als *Nebenbedingung.* Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sind die *Lagrangeschen Multiplikatoren.*

*15.7 Beispiel.* Der Rauminhalt einer Konservendose mit Radius $r$ und Höhe $h$ beträgt $\pi r h^2$, ihre Oberfläche $2\pi r^2 + 2\pi r h$. Für welche Werte von $r$ und $h$ ist die Oberfläche einer $1\ell$-Konservendose minimal?

$$\begin{aligned} f(r,h) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h, \\ g(r,h) &= \pi r^2 h - 1. \end{aligned}$$

Es gibt nur einen Lagrangeschen Multiplikator $\lambda$. Wir erhalten drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi r h &= 0 \\ 2\pi r + \lambda \pi r^2 &= 0, \\ \pi r^2 h &= 1. \end{aligned}$$

Aus der zweiten folgt $\lambda = -2/r$. Einsetzen in die erste gibt $h = 2r$ und schließlich $r = 1/\sqrt[3]{2\pi}$.

*15.8 Beispiel.* Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Die quadratische Form $f(x) = x^T A x$ nimmt auf der $S^{n-1}$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Sei $v \in S^{n-1}$ ein Punkt, in dem $f$ ihr Maximum annimmt. Wir wollen zeigen, dass $v$ ein Eigenvektor von $A$ ist. Für $g(x) = 1 - \sum_{j=1}^n x_j^2$ gilt $S^{n-1} = g^{-1}(0)$. Es gilt $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, also $Df(x) = 2Ax$. Die Lagrange-Gleichung hat also die Gestalt

$$2Ax - 2\lambda x = 0.$$

Daher ist $v$ ein Eigenvektor und $\lambda$ der zugehörige Eigenwert.

# 16. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Wir zitieren einen Satz aus der Linearen Algebra II.

**16.1 Satz** (Binet-Cauchy). *Für* $A \in k^{n\times m}$ *und* $B \in k^{m\times n}$ *und* $n \le m$ *ist*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{L\subseteq\{1,\dots,m\}\\ |L|=n}} \det\left( (a_{j,\ell})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \ell\in L}} \right) \det\left( (b_{\ell,j})_{\substack{j=1,\dots,n\\ \ell\in L}} \right).$$

**16.2 Definition.** Sei $A \in k^{n\times m}$ mit $m \le n$. Die *Gramsche Determinante* von $A$ ist definiert als $\det(A^T A)$.

*Bemerkung.* Aus der Formel von Binet-Cauchy folgt, dass die Gramsche Determinante genau dann verschwindet, wenn $\operatorname{Rang} A < n$.

*16.3 Beispiel.* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$A^T A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Die Gramsche Determinante ist also gleich 48. Das kann man auch mit dem Satz von Cauchy-Binet sehen, denn

$$\det(A^T A) = \left(\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 = 16+16+16 = 48.$$

**16.4 Lemma.** *Die Gramsche Determinante ist invariant unter Verknüpfungen mit orthogonalen Abbildungen.*

*16.5 Bemerkung.* Für $n \le N$ seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Das von ihnen aufgespannte *Parallelotop* ist die Menge

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \,\middle|\, \forall j : 0 \le x_j \le 1 \right\}.$$

Wir wollen ihm ein $n$-dimensionales Volumen zuordnen. Dazu wählen wir eine orthogonale Abbildung $U\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, welche die lineare Hülle von $\{v_1, \dots, v_n\}$ nach

$\mathbb{R}^n \times \{0\}$ abbildet, und setzen $Uv_j = (w_j, 0)$. Weil $U$ eine Isometrie ist, sollte $P$ dasselbe $n$-dimensionale Volumen haben wie

$$Q = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j w_j \middle| \forall j : 0 \leq x_j \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Wegen des Transformationssatzes ist $\lambda_n(Q) = |\det(T)|$ für

$$T = (w_1, \dots, w_n)\,.$$

Setzen wir

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

so ist $|\det(T)|$ gleich der Wurzel aus der Gramschen Determinanten von $\widetilde{T}$. Da die Spalten von $\widetilde{T}$ gleich den $Uv_j$ sind, legt Lemma 16.4 nahe, das $n$-dimensionale Volumen von $P(v_1, \dots, v_n)$ als

$$\sqrt{\det\left(\left(v_1, \dots, v_n\right)^{T} \left(v_1, \dots, v_n\right)\right)}$$

zu definieren.

**16.6 Definition.** Es sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Eine Menge $G \subset M$ heißt *klein,* wenn sie im Definitionsbereich einer einzelnen Karte liegt.

**16.7 Lemma.** *Die endlichen Vereinigungen von kleinen Borelmengen bilden einen Ring von Untermengen von $M$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathcal{K}(M)$.*

**16.8 Definition.** Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $G \in \mathcal{K}(M)$. Dann ist $G$ auch endliche Vereinigung von disjunkten, kleinen Borelmengen, $G = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$. Sei $\psi_j \colon W_j \to V_j \subset M$ eine lokale Parametrisierung mit $B_j \subset \psi_j(W_j)$. Dann setzen wir

$$\sigma(G) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\psi_j^{-1}(B_j)} \sqrt{\det(D\psi_j(w)^T D\psi_j(w))}\; d\lambda_n(w). \tag{16.1}$$

**16.9 Satz.** *Die Abbildung $\sigma$ aus (16.1) hängt weder von der Zerlegung von $G$ in kleine Borelmengen noch von der Wahl der lokalen Parametrisierungen ab.*

*Beweis.* Wir behandeln zuerst den Fall, dass $G$ im Bild von zwei lokalen Parametrisierungen $\varphi \colon W \to M$ und $\psi \colon V \to M$ liegt. Dann ist $\rho := \psi^{-1} \circ \varphi \colon W \to U$ ein

$C^k$-Diffeomorphismus. Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned}
&\int_{\psi^{-1}(G)} \sqrt{\det(D(\psi)(u)^T D(\psi)(u))}\, d\lambda_n(u) \\
&\qquad = \int_{\varphi^{-1}(G)} \sqrt{\det(D(\psi)(\rho(w))^T D(\psi)(\rho(w)))}\, |\det(D(\rho)(w))|\, d\lambda_n(w) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(G)} \sqrt{\det(D(\psi)(\rho(w))^T D(\psi)(\rho(w)))} \sqrt{\det(D(\rho)(w)^T) \det(D(\rho)(w))}\, d\lambda_n(w) \\
&\qquad = \int_{\varphi^{-1}(G)} \sqrt{\det(D(\rho)(w)^T D(\psi)(\rho(w))^T D(\psi)(\rho(w)) D(\rho)(w))}\, d\lambda_n(w) \\
&\qquad\qquad = \int_{\varphi^{-1}(G)} \sqrt{\det(D(\varphi)(w)^T D(\varphi)(w))}\, d\lambda_n(w).
\end{aligned}$$

Seien nun lokale Parametrisierungen $\varphi_j \colon V_j \to M$, $j = 1, \dots, k$, und $\psi_\ell \colon W_\ell \to M$, $\ell = 1, \dots, m$, und Borelmengen $B_j \subset \varphi_j(V_j)$ und $C_\ell \subset \psi_\ell(W_\ell)$ gegeben, so dass $G = \bigcup_{j=1}^k B_j = \bigcup_{\ell=1}^m C_\ell$ und die $B_j$ bzw. $C_\ell$ jeweils paarweise verschieden sind. Dann

$$G = \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{\ell=1}^{m} B_j \cap C_\ell.$$

Auf die Mengen $B_j \cap C_\ell$ können wir den ersten Teil des Beweises anwenden

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j^{-1}(B_j)} \sqrt{\det(D(\varphi_j)(u)^T D(\varphi_j(u)))}\, d\lambda_n(u) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{m} \int_{\varphi_j^{-1}(B_j \cap C_\ell)} \sqrt{\det(D(\varphi_j)(u)^T D(\varphi_j(u)))}\, d\lambda_n(u) \\
&\qquad = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \int_{\psi_\ell^{-1}(B_j \cap C_\ell)} \sqrt{\det(D(\psi_\ell)(w)^T D(\psi_\ell(w)))}\, d\lambda_n(w) \\
&\qquad\qquad = \sum_{\ell=1}^{m} \int_{\psi_\ell^{-1}(C_\ell)} \sqrt{\det(D(\psi_\ell)(w)^T D(\psi_\ell(w)))}\, d\lambda_n(w). \qquad \square
\end{aligned}$$

**16.10 Satz.** *Die Abbildung $\sigma$ ist ein Prämaß auf $\mathcal{K}(M)$.*

*Beweis.* Es sei $G = \bigcup_{j=1}^k B_j \in \mathcal{K}(M)$ mit disjunkten, kleinen Borelmengen $B_j = \varphi_j(V_j)$. Um die $\sigma$-Additivität zu zeigen, sei $G = \bigcup_{\ell=1}^\infty G_\ell$ für eine disjunkte Folge von

$G_\ell \in \mathcal{K}(M)$. Dann folgt aus der $\sigma$-Additivität des Lebesguemaßes

$$\begin{aligned}\sigma(G) = \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} &\sqrt{\det(D(\varphi_j)(u)^T D(\varphi_j)(u))}\, d\lambda_n(u)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{V_j \cap \varphi_j^{-1}(G_\ell)} \sqrt{\det(D(\varphi_j)(u)^T D(\varphi_j)(u))}\, d\lambda_n(u)\\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j^{-1}(B_j \cap G_\ell)} \sqrt{\det(D(\varphi_j)(u)^T D(\varphi_j)(u))}\, d\lambda_n(u) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma(G_\ell). \quad \square\end{aligned}$$

**16.11 Definition.** Wegen des Maßfortsetzungssatzes existiert eine Fortsetzung von $\sigma$ zu einem Maß. Es handelt sich um das Lebesguemaß auf $M$. Die zugehörige $\sigma$-Algebra bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(M)$.

**Bezeichnung.** Wenn $M$ der reguläre Rand eines regulären Polyeders ist, dann bezeichnet man $\sigma$ auch als *Oberflächenmaß*.

**16.12 Satz.** *Es sei $M$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Dann besitzt $M$ eine abzählbare, dichte Teilmenge.*

**16.13 Satz.** *Es sei $M$ eine $n$-dimensionale $C^k$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ mit Atlas $\mathcal{A}$. Dann besitzt $M$ einen höchstens abzählbaren Atlas, der aus Karten besteht, die zu $\mathcal{A}$ gehören.*

*Wenn $M$ kompakt ist, gibt es sogar einen endlichen Atlas.*

**Satz.** *Das Lebesguemaß auf $M$ ist ein Borelmaß.*

**16.14 Satz.** *Sei $(\varphi_j\colon U_j \to V_j \subset \mathbb{R}^n)_{j\in\mathbb{N}}$ ein Atlas von $M$, für jedes $j$ sei $\psi_j := \varphi_j^{-1}$ und es sei $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von $M$ mit $W_j \subset U_j$. Schließlich sei $f\colon M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare, messbare Funktion. Dann gilt für das Lebesguemaß $\sigma$ aus* (16.1)

$$\int f\, d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j(W_j)} f(\psi_j(x)) \sqrt{\det(D(\psi_j)(x)^T D(\psi_j)(x))}\, d\lambda_n(x).$$

*16.15 Bemerkung.* Der Beweis von Satz 16.14 zeigt, dass die analoge Aussage für nicht-negative, messbare Funktionen ebenfalls gilt.

*16.16 Beispiel.* Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg, dessen Einschränkung auf $]a,b[$ injektiv und und eine Immersion von der Klasse $C^1$ ist. Dann ist $\gamma(]a,b[)$ eine eindimensionale $C^1$-Untermannigfaltigkeit, die durch $\gamma$ parametrisiert wird. Für die Gramsche Determinante gilt

$$\det\left(\gamma'(t)^T \gamma'(t)\right) = \|\gamma'(t)\|_2^2.$$

Wegen Satz 16.14 gilt für eine auf $\gamma(]a,b[)$ integrierbare Funktion $f$

$$\int f\, d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|_2\, d\lambda_1(t).$$

Insbesondere ist $\sigma(]a,b[)$ die in der Analysis II eingeführte Weglänge.

**16.17 Satz.** *Es sei $M$ eine $n$-dimensionale $C^k$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und es sei $N \subseteq M$. Das Lebesguemaß auf $M$ werde mit $\sigma$ bezeichnet. Dann sind äquivalent:*

*(a)* $\sigma(N) = 0$.

*(b) Für jedes $x \in N$ existiert eine Karte $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und $\lambda_n(\varphi(N \cap U)) = 0$.*

*(c) $N$ ist eine $n$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff.*

*Beweis.* (a) $\Longrightarrow$ (b): Da es auf die Wahl der Karten nicht ankommt, gilt

$$0 = \sigma(N \cap U) = \int_{\varphi(N\cap U)} \sqrt{\det(D(\varphi^{-1})(x)^T D(\varphi^{-1})(x))}\, d\lambda_n(x).$$

Da der Integrand positiv ist, wird über eine Nullmenge integriert.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Aus $\lambda_n(\varphi(N \cap U)) = 0$ folgt $\sigma(N \cap U) = 0$. Da es einen abzählbaren Atlas gibt, welcher aus Karten gemäß (b) besteht, folgt (a) aus der $\sigma$-Additivität von $\sigma$.

(a) $\Longrightarrow$ (c): Für jedes $x \in M$ existieren eine Umgebung $U_x$ von $x$ im $\mathbb{R}^m$ und ein Diffeomorphismus $\Phi_x\colon U_x \to V_x \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\Phi_x(U_x \cap M) = V_x \cap \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Die Einschränkungen der $\Phi_x$ auf $M \cap U_x$ bilden einen Atlas von $M$. Nach Satz 16.13 besitzt er einen abzählbaren Teilatlas $\left(\Phi_{x_j}|_{U_{x_j}\cap M}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Es genügt zu zeigen, dass es sich bei den $U_{x_j} \cap N$ um $n$-Nullmengen im Sinne von Hausdorff handelt. Wegen (a) ist jedenfalls $\Phi_{x_j}(U_{x_j} \cap N)$ eine $\lambda_n$-Nullmenge. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es daher halboffene Quader $Q_j$, $j \in \mathbb{N}$, mit

$$\Phi_{x_j}\left(U_{x_j} \cap N\right) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j) < \epsilon. \tag{16.2}$$

Erlaubt man eine beliebig kleine Vergrößerung von $\lambda_n(Q_j)$, so kann man erreichen, dass $Q_j$ rationale Seitenverhältnisse hat und deswegen als disjunkte Vereinigung halboffener Würfel geschrienben werden kann. Daher impliziert (16.2), dass $\Phi_{x_j}\left(U_{x_j} \cap N\right)$ eine $n$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff ist. Wegen Satz (13.5) folgt, dass auch $U_{x_j} \cap N$ eine $n$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff ist.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Sei $x \in N$ und sei $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung $U$ von $x$ auf eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Wegen Satz 13.5 ist $\Phi(N \cap U)$ eine $n$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es daher halboffene Würfel $W(a_j, r_j)$ mit $\Phi(N \cap U) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} W(a_j, r_j)$ und $\sum_{j=1}^{\infty} r_j^n < \epsilon$. Daraus folgt sofort $\lambda_n(\Phi(N \cap U)) < 2^n\epsilon$. Die gesuchte Karte ist die Einschränkung von $\Phi$ auf $M \cap U$. $\square$

# 17. Zerlegungen der Eins

**17.1 Definition.** Eine Folge $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt *approximative Eins* im $L^1(\mathbb{R}^n)$, wenn

(a) $\rho_k \geq 0$ für alle $k$,

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k \, d\lambda_n = 1$ für alle $k$,

(c) $\lim_{k\to\infty} \int_{\{\|x\|\geq\epsilon\}} \rho_k \, d\lambda_n = 0$ für alle $\epsilon > 0$.

*17.2 Bemerkung.* (a) Die approximative Eins approximiert die Eins des Faltungsprodukts.

(b) Für $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Supp} g \subseteq [0,1]$ wie in Beispiel 12.7 setzen wir

$$\rho(x) := \prod_{j=1}^{n} g\left(x_j - \frac{1}{2}\right)$$

und für $\epsilon > 0$

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann rechnet man sofort nach, dass $(\rho_{1/j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine approximative Eins ist, welche aus Funktionen der Klasse $C^\infty$ besteht.

**17.3 Satz.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $C > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Wenn $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt und $d := \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)$ ist, dann existiert $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{Supp}\eta \subset U$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$ für alle $x \in K$ und $\|\nabla\eta(x)\| \leq \frac{C}{d}$ für alle $x \in U$.*

**17.4 Satz** (Glatte Zerlegung der Eins). *Sei $\mathcal{U}$ ein System offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und sei $G := \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Dann gibt es Folgen $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}$ und $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit*

*(a)* $G = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$.

*(b) Für jedes $j$ gilt $\operatorname{Supp}\varphi_j \subset U_j$.*

*(c) Für jede kompakte Menge $K \subset G$ gilt $K \cap \operatorname{Supp}\varphi_j \neq \emptyset$ nur für endlich viele $j$.*

*(d) Für jedes $j$ gilt $0 \leq \varphi_j \leq 1$ und für jedes $x \in G$ gilt $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x) = 1$.*

Man sagt: Die $\varphi_j$ bilden eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

*17.5 Bemerkung.* Anstelle einer Zerlegung von M in kleine Borelmegen wie in (16.1) kann man auch eine Zerlegung der Eins benutzen, um $\int f \, d\sigma$ zu erklären. Für jedes $x \in M$ gibt es einen Diffeomorphismus $\Phi_x \colon U_x \to \mathbb{R}^N$ mit $x \in U_x$. Wir setzen $\mathcal{U} = \{U_x | x \in M\}$ und konstruieren eine untergeordnete Zerlegung $(\varphi_j \colon U_j \to \mathbb{R})_{j \in \mathbb{N}}$ der Eins. Dann gilt für integrierbares f

$$\int f \, d\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Phi_j(U_j))} \varphi_j(\Phi_j^{-1}(x)) f(\Phi_j^{-1}(x)) \sqrt{\det\big(D(\Phi_j^{-1})(x)^T D(\Phi_j^{-1})(x)\big)} \, d\lambda_n(x).$$

# 18. Der Gaußsche Integralsatz

**18.1 Definition.** Sei $M$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $a \in M$. Das Orthogonalkomplement von $T_a(M)$ im $\mathbb{R}^N$ wird mit $N_a(M)$ bezeichnet und heißt *Normalenraum* von $M$ in $a$. Die Elemente von $N_a(M)$ heißen *Normalenvektoren.*

*18.2 Beispiel.* Ist $a \in S^{n-1}$, so ist $T_a(S^{n-1}) = a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (a, v) = 0\}$ und $N_a(S^{n-1})$ ist der von $a$ erzeugte Unterraum.

**18.3 Definition.** Ein *Vektorfeld* ist eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^N$, wobei $X \subseteq \mathbb{R}^N$.

Die *Divergenz* einer Vektorfelds $f$ ist die Funktion

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}.$$

*18.4 Bemerkung.* (a) Das muss man sich so vorstellen, dass an jedem Punkt $x \in X$ der Vektor $f(x)$ angebracht ist. Ein Beispiel ist das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

(b) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein $C^k$-Polyeder und es sei $a \in \partial_r^k(G)$ ein regulärer Randpunkt. Dann ist $\partial_r^k(G)$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Der Normalenraum $N_a(\partial_r^k G)$ ist daher eindimensional.

Es gibt eine Umgebung $U$ von $a$ und eine $C^k$-Funktion $\rho\colon U \to \mathbb{R}$, so dass $G \cap U = \{x \in U | \rho(x) < 0\}$. Für diese Funktion gilt $U \cap \partial_r^k G = \{x \in U | \rho(x) = 0\}$ und $T_a \partial_r^k G = \{v \in \mathbb{R}^n | \langle v \cdot \nabla\rho(a)\rangle = 0\}$. Daher wird $N_a \partial_r^k G$ von $\nabla\rho(a)$ aufgespannt. In $N_a \partial_r^k G$ gibt es also zwei Einheitsvektoren. Den, der aus $G$ heraus zeigt, bezeichnen wir als den *äußeren Normalenvektor*. Der Beweis von Satz 14.12 zeigt, dass es sich dabei um

$$\nu(x) := \frac{\nabla\rho(a)}{\|\nabla\rho(a)\|_2}$$

handelt. Das Vektorfeld $\nu$ ist das äußere Normalenvektorfeld an $G$.

*Bemerkung.* Das äußere Normalenvektorfeld an $S^{n-1}$ ist die Identität.

**18.5 Bezeichnung.** Wenn $\sigma$ das Lebesguemaß auf einer Mannigfaltigkeit $M$ ist, dann bezeichnen wir den Raum aller $\sigma$-integrierbaren Funktionen auf $M$ mit $L^1(M)$. Wenn $G$ ein $C^1$-Polyeder ist, dann schreiben wir $L^1(\partial G)$ anstelle von $L^1(\partial_r^1 G)$.

Ziel des Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

**18.6 Theorem** (Gaußscher Integralsatz). *Es sei* $G \subset \mathbb{R}^n$ $C^1$*-Polyeder mit äußerem Normalenvektorfeld* $\nu$ *und es sei* $w\colon G \cup \partial_r^1 G \to \mathbb{R}^n$ *ein stetiges, beschränktes Vektorfeld, dessen Einschränkung auf* $G$ *von der Klasse* $C^1$ *ist. Falls die Abbildung* $x \mapsto \langle w(x), \nu(x)\rangle$ *in* $L^1(\partial G)$ *und die Abbildung* $\operatorname{div} w$ *in* $L^1(G)$ *ist, so gilt*

$$\int_G \operatorname{div} w \, d\lambda_n = \int_{\partial G} \langle w(x), \nu(x)\rangle \, d\sigma(x). \tag{18.1}$$

*Bemerkung.* Da der singuläre Rand von $G$ eine $(n-1)$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff ist, unterscheiden wir nicht zwischen $\int_{\partial G}$ und $\int_{\partial_r^1 G}$.

*18.7 Bemerkung.* Mit $\overline{C}^k(G, \mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Raum aller $C^k$-Funktionen auf $G$, so dass für jedes $\alpha$ mit $|\alpha| \le k$ die Ableitung $D^\alpha f$ stetig nach $\overline{G}$ fortgesetzt werden kann.

Der Gaußsche Integralsatz gilt dann insbesondere für $C^1$-Polyeder mit $\sigma(\partial_r^1 G) < \infty$ und $w \in \overline{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$.

**18.8 Satz** (Volumenformel). *Es sei* $G \subset \mathbb{R}^n$ *ein* $C^1$*-Polyeder mit* $\sigma(\partial G) < \infty$*. Dann gilt*

$$n\lambda_n(G) = \int_{\partial G} \langle x, \nu(x)\rangle \, d\sigma(x).$$

**18.9 Satz.** *Sei* $V \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $I$ *ein offenes Intervall und seien* $\varphi, \psi \in C^1(V)$ *mit Werten in* $I$ *und* $\varphi \le \psi$*. Für* $f \in C^1(V \times I)$ *setzen wir*

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t) \, dt.$$

*Dann gilt für* $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \, dt + f(x, \psi(x)) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) - f(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

**18.10 Lemma.** *Es sei* $G \subset \mathbb{R}^n$ *ein* $C^1$*-Polyeder und es sei* $x_0 \in \partial_r^k G$*. Nach Satz 14.12 existieren eine offene Menge* $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$*, ein offenes Intervall* $I$ *und eine* $C^1$*-Funktion* $\psi\colon V \to I$*, so dass*

$$\begin{aligned} \partial G \cap V \times I &= \{(\xi, \psi(\xi)) | \xi \in V\}, \\ G \cap V \times I &= \{(\xi, x_n) \in V \times I | x_n \gtrless \psi(\xi)\}. \end{aligned}$$

*Es sei* $w \in C(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ *mit* $w|_G \in C^1(G)$*,* $\operatorname{div}(w) \in L^1(G)$ *und* $\operatorname{Supp} w \subseteq V \times I$*. Dann gilt*

$$\int_{G \cap V \times I} \operatorname{div} w \, d\lambda_n = \int_{\partial G \cap V \times I} \langle w(x), \nu(x)\rangle \, d\sigma(x).$$

**18.11 Lemma.** *Es gelten die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Zusätzlich sei* $\operatorname{Supp} w$ *eine kompakte Teilmenge von* $G \cup \partial_r^1 G$. *Dann gilt* (18.1).

**18.12 Satz** (Partielle Integration). *Es sei* $G$ *ein* $C^1$*-Polyeder mit stetigem äußerem Normalenvektorfeld* $\nu \colon \partial_r^1 G \to \mathbb{R}^n$ *und* $\sigma(\partial_r^1 G) < \infty$. *Für* $f, g \in \overline{C}^1(G, \mathbb{R})$ *und* $1 \leq j \leq n$ *gilt*

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_j} g \, d\lambda_n = \int_{\partial G} f g \nu_j \, d\sigma - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_j} \, d\lambda_n.$$

**18.13 Bezeichnung.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Der *Laplace-Operator* $\Delta$ ist definiert durch

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad f \in C^2(U).$$

(b) Die Richtungsableitung in Richtung des äußeren Normalenfelds ist

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f, \nu \rangle .$$

**18.14 Theorem** (Erste Greensche Formel). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein* $C^1$*-Polyeder, sei* $f \in \overline{C}^1(U)$ *und sei* $g \in \overline{C}^2(U)$. *Dann gilt*

$$\int_U f \Delta g \, d\lambda_n = \int_{\partial U} f \frac{\partial g}{\partial \nu} \, d\sigma - \int_G \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\lambda_n.$$

**18.15 Theorem** (Zweite Greensche Formel). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein* $C^1$*-Polyeder und seien* $f, g \in \overline{C}^2(U)$. *Dann gilt*

$$\int_U (f \Delta g - g \Delta f) \, d\lambda_n = \int_{\partial U} \left( f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

# 19. Differentialformen

**19.1 Bezeichnung.** Wenn $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ ein glattes Vektorfeld ist, so bezeichnen wir die Komponentenabbildungen mit $F_j$, $j = 1, 2, 3$. Man hat lineare Abbildungen

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U)$$

wobei

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right), \\ \operatorname{rot}(F) &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right), \\ \operatorname{div}(F) &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$.

Ist $U$ konvex, so kann man zeigen: Zu jedem $F$ mit $\operatorname{rot} F = 0$ gibt es ein $f$ mit $\operatorname{grad} f = F$ und zu jedem $F$ mit $\operatorname{div} F = 0$ gibt es ein $G$ mit $\operatorname{rot} G = F$.

Diesen Kalkül wollen wir für höhere Dimensionen verallgemeinern.

**19.2 Bezeichnung.** $e_1, \dots, e_n$ bezeichne die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Es sei $(\mathbb{R}^n)^*$ der Dualraum von $\mathbb{R}^n$, also der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann bilden $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$, wobei

$$\Delta_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

**19.3 Definition.** Sei $p \in \mathbb{N}$. Eine *alternierende* $p$-*Form* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\omega\colon (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}$ mit

(a) $\omega$ ist linear in jedem Argument.

(b) für $i \neq j$ gilt $\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$, wenn alle anderen Argumente unverändert bleiben.

Die alternierenden $p$-Formen auf $\mathbb{R}^n$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$. Man setzt $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^*$.

*19.4 Beispiel.* (a) $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Durch $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$ erhält man eine alternierende $n$-Form auf dem $\mathbb{R}^n$.

(c) Ein Beispiel einer konkreten 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ liefert

$$\omega\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

*19.5 Bemerkung.* Die Bedingung (b) in Definition 19.3 ist äquivalent zu

(b*) $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

**19.6 Definition.** Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in (\mathbb{R}^n)^*$, so definiert man $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p)(v_1, \dots, v_p) = \det((\varphi_i(v_j))_{i,j=1,\dots,p}).$$

*19.7 Bemerkung.* (a) Die 2-Form aus dem letzten Beispiel ist gleich $\Delta_1 \wedge \Delta_2$.

(b) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n = -\varphi_2 \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ und $\varphi_1 \wedge \varphi_1 \wedge \dots = 0$.

**19.8 Bezeichnung.** Ist $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, also $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$, so setzt man

$$\begin{aligned} |I| &= p, \\ e_I &= (e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \in (\mathbb{R}^n)^p, \\ \Delta_I &= \Delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{i_p} \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*. \end{aligned}$$

*19.9 Bemerkung.* (a) Sind $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|I| = |J|$, so gilt

$$\Delta_I(e_J) = \begin{cases} 1, & I = J, \\ 0, & I \neq J. \end{cases}$$

(b) $\Delta_\emptyset = \mathrm{id}_\mathbb{R} \in \Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^*$.

**19.10 Satz.** *Die $\Delta_I$ mit $|I| = p$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$. Insbesondere* $\dim \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{p}$ *und $\lambda^p(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$ für $p > n$.*

*Beweis.* Wird in der Linearen Algebra II gezeigt. □

**19.11 Definition.** Für $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$, $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ und $J = \{j_1, \dots, j_h\}$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_h \leq n$ setzen wir

$$\Delta_I \wedge \Delta_J = \Delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{i_p} \wedge \Delta_{j_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{j_h}.$$

Daraus konstruiert man eine Verknüpfung

$$\wedge\colon \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^* \times \Lambda^h(\mathbb{R}^n)^* \to \Lambda^{p+h}(\mathbb{R}^n)^*,$$
$$\left(\sum_{|I|=p} a_I \Delta_I\right) \wedge \left(\sum_{|J|=h} b_J \Delta_J\right) = \sum_{I,J} a_I b_J \Delta_I \wedge \Delta_J.$$

*19.12 Beispiel.* (a) $\Delta_{\{1,3\}} \wedge \Delta_{\{2\}} = -\Delta_{\{1,2,3\}}$.

(b) $\Delta_I \wedge \Delta_J = 0$ falls $I \cap J \neq \emptyset$.

**19.13 Satz.** *Die Verknüpfung* $\wedge$ *ist bilinear, assoziativ und graduiert kommutativ. Letzteres bedeutet*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ph} \eta \wedge \omega \quad \textit{für } \omega \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^* \textit{ und } \eta \in \Lambda^h(\mathbb{R}^n)^*.$$

*Beweis.* Wird in der Linearen Algebra II bewiesen. □

**19.14 Definition.** (a) Sei $U$ offen im $\mathbb{R}^n$. Eine *Differentialform der Ordnung* $p$ oder $p$-*Form* ist eine Abbildung

$$\omega\colon U \to \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*.$$

Insbesondere sind die 0-Formen gerade die Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

(b) Die konstante Differentialform $x \mapsto \Delta_I$ wird mit $dx_I$ bezeichnet. Statt $dx_{\{i\}}$ schreibt man $dx_i$.

**19.15 Definition.** Eine Differentialform $\omega$ der Ordnung $p$ auf $U$ ist von der Form

$$\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_I$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $f_I$. Man sagt, $\omega$ sei von der Klasse $C^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, wenn alle $f_I$ diese Eigenschaft haben. Eine *glatte* Differentialform ist eine Differentialform von der Klasse $C^\infty$. Mit $\Omega^p_k(U)$ bezeichnen wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum der $p$-Formen auf $U$ von der Klasse $C^k$.

*19.16 Bemerkung.* (a) Die Summe von zwei $p$-Formen ist dabei wie folgt erklärt: Ist $\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_I$ und $\eta = \sum_{|I|=p} b_I dx_I$, so ist $\omega + \eta = \sum_{|I|=p} (f_I + g_I) dx_I$.

(b) Für eine $p$-Form $\omega$ und eine $h$-Form $\eta$ ist das äußere Produkt erklärt durch $(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$.

(c) Es gilt $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, speziell $dx_i \wedge dx_i = 0$.

**19.17 Definition.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $\omega = \sum_{|I|=p} f_I dx_I \in \Omega^p_k(U)$. Die $(p+1)$-Form

$$d\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \in \Omega^{p+1}_{k-1}(U)$$

bezeichnet man als *äußere Ableitung* von $\omega$.

*19.18 Beispiel.* (a) $U = \mathbb{R}^3$ und $\omega$ sei die 3-Form $x \mapsto (3x_1 + 4x_2^2) dx_1 \wedge dx_3$. Dann $d\omega(x) = -8x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

(b) Sei $\omega$ die 0-Form $x \mapsto x_i$. Dann $d\omega = dx_i$.

(c) Sei $\omega$ eine 0-Form, also $\omega(x) = f(x)$. Dann $d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$, was man mit dem Gradienten identifizieren kann.

*19.19 Bemerkung.* Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Man hat das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(U, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \\
\downarrow{=} & & \varphi_1 \downarrow{\cong} & & \varphi_2 \downarrow{\cong} & & \varphi_3 \downarrow{\cong} \\
\Omega^0_\infty(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1_\infty(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2_\infty(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3_\infty(U)
\end{array}$$

Dabei sind die Vektorraumisomorphismen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f_1, f_2, f_3) &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \\
\varphi_2(f_1, f_2, f_3) &= f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy, \\
\varphi_3(f) &= f dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

*19.20 Bemerkung.* (a) Die Abbildung $d\colon \Omega^p_k(U) \to \Omega^{p+1}_{k-1}(U)$ is linear.

(b) Für $\omega \in \Omega^p_k(U)$ und $\eta \in \Omega^h_k(U)$ gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta.$$

Der folgende Satz ist eine Folgerung des Satzes von H. A. Schwarz.

**19.21 Satz.** *Ist $\omega$ eine Differentialform von der Klasse $C^2$, so gilt $d(d\omega) = 0$.*

**19.22 Definition.** Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $x_0 \in U$ gibt, so dass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke zwischen $x$ und $x_0$ in $U$ liegt.

*Bemerkung.* Konvexe Mengen sind sternförmig.

**19.23 Satz** (Lemma von Poincaré). *Sei $U$ eine offene, sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, sei $p \in \mathbb{N}$ und sei $\omega \in \Omega^p_\infty(U)$ mit $d\omega = 0$. Dann existiert $\eta \in \Omega^{p-1}_\infty(U)$ mit $d\eta = \omega$.*

*Beweis.* Diesen Satz beweise ich nicht. Ein sehr eleganter Beweis findet sich in Spivak, *Calculus on Manifolds*, Kapitel 4. Kaballo beweist als Theorem 30.4 einen allgemeineren Satz. □

**19.24 Definition.** Sei $k \in \mathbb{N}_0$, sei $U$ offen im $\mathbb{R}^n$, sei $V$ offen im $\mathbb{R}^m$, sei $\varphi\colon V \to U$ von der Klasse $C^{k+1}$. Wir bezeichnen mit $\varphi_i$ die i-te Komponentenfunktion von $\varphi$, also $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Es sei $p \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega^p_k(U)$, $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, eine p-Form. Dann ist

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (f_{i_1,\dots,i_p} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p} \in \Omega^p_k(V)$$

die mit $\varphi$ *zurückgezogene* Differentialform.

*19.25 Beispiel.* $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, und $\omega \in \Omega^1_\infty(\mathbb{R}^2)$ sei gegeben durch $\omega = xy^2 dx + y\, dy$. Dann $d\varphi_1 = -\sin(t)dt$ und $d\varphi_2 = \cos(t)dt$. Daher

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega) &= \cos(t)\sin^2(t)(-\sin(t))dt + \sin(t)\cos(t)dt\\ &= \sin(t)\cos(t)(1-\sin(t)^2)dt = \sin(t)\cos(t)^3 dt.\end{aligned}$$

**19.26 Satz.** *Falls* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $f \in C(U)$ *und* $\varphi\colon U \to V$ *von der Klasse* $C^1$*, so gilt*

$$\varphi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (f \circ \varphi)\det(D\varphi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

**19.27 Satz.** *Es gelten*

*(a)* $\varphi^*$ *ist linear.*

*(b) Ist* $f \in \Omega^0_k(U) = C^k(U)$*, dann* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$*.*

*(c)* $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*(\omega)$*.*

*(d)* $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta)$*.*

*(e)* $d(\varphi^*(\omega)) = \varphi^*(d\omega)$*.*

*(f)* $\psi^*(\varphi^*(\omega)) = (\varphi \circ \psi)^*(\omega)$*.*

*Bemerkung.* Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^*$ ist durch die Eigenschaften (a)–(e) eindeutig bestimmt. Bezeichnet man mit $p_i\colon x \mapsto x_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate, so stellt sich das entscheidende Argument wie folgt dar

$$\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*(p_i)) = d(p_i \circ \varphi) = d\varphi_i = dx_i.$$

# 20. Orientierte Untermannigfaltigkeiten

Wenn bei einer Untermannigfaltigkeit die Regularität nicht angegeben ist, dann soll sie von der Klasse $C^\infty$ sein.

**20.1 Satz.** *Sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und seien $\varphi_j \colon U_j \to V_j$ zwei Karten von $M$. Sei $U = U_1 \cap U_2$, und seien $W_j = \varphi_j(U)$, $j = 1, 2$. Dann sind die $W_j$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, und die Abbildung*

$$\tau_{\varphi_1,\varphi_2} \coloneqq \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{W_1} \colon W_1 \to W_2$$

*ist ein Diffeomorphismus. Er wird als* Parametertransformation *bezeichnet.*

**20.2 Definition.** Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und sei $\varphi \colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Falls $\det(D\varphi(x)) > 0$ für alle $x \in U$, so ist $\varphi$ *orientierungstreu.*

*20.3 Bemerkung.* (a) Im $\mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung an der $y$-Achse nicht orientierungstreu.

(b) Wenn $U$ wegzusammenhängend ist, dann genügt in Definition 20.2 die Forderung $\det(D\varphi(x)) > 0$ für einen einzigen Punkt.

**20.4 Definition.** Sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(a) Zwei Karten $\varphi_1, \varphi_2$ heißen *gleich orientiert*, wenn $\tau_{\varphi_1,\varphi_2}$ orientierungstreu ist. (Nach unserer Definition ist die leere Abbildung orientierungstreu.)

(b) Ein Atlas heißt *orientiert*, wenn je zwei seiner Karten gleich orientiert sind.

(c) $M$ heißt *orientierbar*, wenn $M$ einen orientierten Atlas besitzt.

(d) Für $M$ sei ein orientierter Atlas $\mathcal{A}$ festgelegt. Eine Karte heißt *positiv orientiert,* wenn sie zu allen mit allen Karten in $\mathcal{A}$ gleich orientiert ist.

*20.5 Beispiel.* (a) Der $\mathbb{R}^n$ ist orientierbar, der er mit einer einzigen Karte, nämlich der Identität, auskommt. Wir verwenden für den $\mathbb{R}^n$ immer diesen Atlas.

(b) Ein orientierter Atlas der $S^1$ wird gegeben durch die beiden Karten

$$\varphi_1 \colon U_1 \coloneqq S^1 \setminus \{(-1,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mapsto t \in \left]-\pi, \pi\right[,$$

$$\varphi_2 \colon U_2 \coloneqq S^1 \setminus \{(1,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} \mapsto s \in \left]0, 2\pi\right[.$$

Für $x := \binom{\cos t}{\sin t} \in U := U_1 \cap U_2$ mit $t \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ sind zwei Fälle möglich:

$y > 0$: Dann $\varphi_1(x) = t = \varphi_2(x)$. In diesem Fall ist $\tau_{\varphi_1,\varphi_2}$ die Identität.

$y < 0$: Dann $\varphi_1(t) = t$ und $\varphi_2(t) = t + 2\pi$. Dann $\tau_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = t + 2\pi$.

**20.6 Satz.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^{k+1}$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sie ist genau dann orientierbar, wenn es eine stetige Abbildung $n\colon M \to \mathbb{R}^{k+1}$ gibt, so dass $n(a) \in N_a(M) \setminus \{0\}$ für jedes $a \in M$ gilt.*

*20.7 Beispiel.* Das Möbiusband

$$M = \left\{ \left( 3\cos(t) + s\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ 3\sin(t),\ s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \middle|\ 0 \le t \le 2\pi,\ -1 < s < 1 \right\}$$

ist nicht orientierbar.

*Skizze.* Man zeigt zuerst, dass

$$\varphi\colon ]0, 2\pi[ \times ]-1, 1[ \to M, (t, s) \mapsto \left( 3\cos(t) + s\sin\left(\frac{t}{2}\right),\ 3\sin(t),\ s\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

eine lokale Parametrisierung von $M$ ist. In ihrem Bild erhalten wir einen Normalenvektor durch das Kreuzprodukt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \times \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} -3\sin(t) + \frac{s}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 3\cos(t) \\ -\frac{s}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3\cos(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{s}{2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + 3\sin(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{s}{2}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ -3\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Punkte $(3, 0, 0) \in M$ kann approximiert werden als $\lim_{t\to 0} \varphi(t, 0)$ und als $\lim_{t\to 2\pi} \varphi(t, 0)$. Im ersten Fall konvergiert der Normalvektor gegen $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, im zweiten gegen $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Also gibt es keine stetige Normale. □

**20.8 Definition.** (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \Omega_0^n(U)$. Dann ist $\omega$ von der Gestalt $\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Wir definieren für eine $\lambda_n$-messbare Menge $A \subset U$

$$\int_A \omega = \int_A f\, d\lambda_n.$$

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte, $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, sei $A \subset U \cap M$ kompakt und sei $\omega \in \Omega_0^n(U)$. Es gebe ferner eine orientierte Karte $\varphi\colon V \to W$ von $M$ mit $A \subset V$. Dann setzen wir

$$\int_A \omega = \int_{\varphi(A)} \left(\varphi^{-1}\right)^* (\omega). \tag{20.1}$$

**20.9 Satz.** *Das Integral (20.1) hängt nicht von der Wahl der Karte $\varphi$ ab.*

*20.10 Bemerkung.* Es sei $M$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Man kann zeigen, dass es eine Form $\sigma \in \Omega^n_\infty(M)$ gibt, so dass jede $n$-Form $\omega$ die Gestalt $\omega = f\,\sigma$, $f \in C(M)$, hat.

Wir können diese Form sogar angeben. Sei dazu $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, sei $U := M \cap \widetilde{U}$ und sei $\Phi\colon \widetilde{U} \to W$ ein $C^\infty$-Diffeomorphismus mit $\Phi(U) = W \cap \mathbb{R}^n \times \{0\} =: V \times \{0\}$. Dann ist $\varphi := \Phi|_U\colon U \to V$ eine Karte. Ihre Umkehrabbildung heiße $\psi$, Dann definieren wir die *Volumenform* $\omega_{\mathrm{Vol}} \in \Omega^n_\infty(U)$ durch

$$\omega_{\mathrm{Vol}(x)} := \sqrt{\det((D(\psi)(\varphi(x)))^T(D(\psi)(\varphi(x))))}\,\Phi^*(\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n). \tag{20.2}$$

Man sieht dann sofort

$$\int_A \omega_{\mathrm{Vol}} = \int_A d\sigma,$$

wobei $\sigma$ das Lebesguemaß auf $M$ ist.

**20.11 Lemma.** *Sei $M$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $A \subseteq M$ kompakt. Dann gibt es Karten $\varphi_j\colon V_j \to W_j$, $j = 1, \ldots, m$ von $M$, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j$.*

**20.12 Definition.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, sei $M$ eine $n$-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit, sei $A \subseteq M \cap U$ kompakt und sei $\omega \in \Omega^n_0(U)$. Seien ferner $V_1, \ldots, V_m$ wie in Lemma 20.11 und sei $(g_j)_{j=1,\ldots m}$ eine der Überdeckung $V_1, \ldots, V_m$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf $A$. Dann setzen wir

$$\int_A \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\mathrm{Supp}(g_j)\cap A} g_j \omega.$$

**20.13 Satz.** *Obige Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten und der Zerlegung.*

*20.14 Bemerkung.* Es sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $\mathcal{A}$ und es sei $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^N$. Dann ist $K := \Phi^{-1}(M \cap V) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas

$$\mathcal{B} := \{\varphi \circ \Phi | \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

**20.15 Satz.** *In der Situation von Bemerkung 20.14 seien $\omega \in \Omega^n_0(V)$ und $A \subset M \cap V$ kompakt. Dann gilt*

$$\int_A \omega = \int_{\Phi^{-1}(A)} \Phi^*(\omega).$$

# 21. Berandete Mannigfaltigkeiten

**21.1 Bezeichnung.** Eine beschränkte, offene Menge $G$ im $\mathbb{R}^n$ ist *glatt berandet,* wenn sie ein $C^\infty$-Polyeder ohne singulären Rand ist.

Nach Satz 20.6 ist $\partial G$ orientierbar. Eine Karte $\varphi\colon \partial G \supseteq U \to V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ist positiv orientiert, wenn $\det\big(\nu(x), D(\varphi^{-1})(\varphi(x))\big) > 0$ für alle $x \in U$.

**21.2 Definition.** Mit $\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \leq 0\}$ bezeichnen wir den unteren Halbraum. Sein Rand ist $\partial\mathbb{R}^k_- = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\}$.

**21.3 Bezeichnung.** Für $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ sei

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = dx_{I\setminus\{i_\ell\}}.$$

**21.4 Theorem** (Gaußscher Integralsatz für Differentialformen). *Es sei* $G \subset \mathbb{R}^n$ *glatt berandet, es sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene Obermenge von* $\overline{G}$ *und es sei* $\omega \in \Omega^{n-1}_0(U)$. *Dann gilt*

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega.$$

**21.5 Bezeichnung.** Die Untermannigfaltigkeit $M$ ist durch Einschränkung der Metrik auf dem $\mathbb{R}^N$ selber ein metrischer Raum. Eine Menge $X \subseteq M$ ist genau dann offen in $M$, wenn es eine offene Menge $G$ im $\mathbb{R}^N$ gibt, so dass $X = M \cap G$. Die analoge Aussage gilt für abgeschlossene Mengen. Mit $\partial X$ soll nun der Rand von $X$ als Teilmenge von $M$ gemeint sein. Er besteht aus allen Punkten $x \in M$, so dass jede seiner Umgebungen sowohl einen Punkt in $X$, als auch einen Punkt in $M \setminus X$ enthält.

**21.6 Definition.** Sei $M$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$. Dann ist $X$ eine $k$-dimensionale *abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit* von $M$, wenn es zu jedem $a \in \partial X$ eine Karte $\varphi\colon V \to W$ von $M$ gibt, so dass gilt

(a) $a \in V$,

(b) $\varphi(X \cap V) = \mathbb{R}^k_- \cap W$,

(c) $\varphi(V \cap \partial X) = \partial\mathbb{R}^k_- \cap W$.

Eine solche Karte heißt *randadaptiert*

*21.7 Bemerkung.* (a) $\partial X \subseteq X$, weil $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k_-$. Insbesondere ist $X$ abgeschlossen in $M$.

(b) Sei $M$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ und sei $X$ eine k-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von $M$. Dann gibt es einen Atlas $\mathcal{A}$ von $M$, so dass jede Karte $\varphi\colon V \to W$ aus $\mathcal{A}$ mit $V \cap \partial X \neq \emptyset$ randadaptiert. Ein solcher Atlas heißt *randadaptiert* bzgl. $X$.

**21.8 Lemma.** *Wenn $M$ orientierbar ist, dann gibt es auch einen orientierten, randadaptierten Atlas.*

*21.9 Bemerkung.* Sei $X$ eine k-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^N$. Dann ist $\partial X$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

**21.10 Lemma.** *Sei $X$ eine $k$-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit einer $k$-dimensionalen, orientierbaren Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^N$. Dann ist auch $\partial X$ orientierbar.*

*Die Orientierung wird dabei wie folgt gewählt: Ist $a \in \partial X$ und ist $\varphi\colon V \to W$ eine positiv orientierte, randadaptierte Karte für eine Umgebung von $a$, so ist*

$$\rho\colon V \cap \partial X \to W \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times 0), \quad x \mapsto \big((-1)^{k-1}\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)\big)$$

*eine positive orientierte Karte von $\partial X$.*

# 22. Der Satz von Stokes

**22.1 Theorem** (Integralsatz von Stokes). *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen, sei* $M \subseteq U$ *eine orientierte,* $n$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei* $\omega \in \Omega_1^{n-1}(U)$*. Sei* $X$ *eine* $n$*-dimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von* $M$*. Es sei* $X$ *kompakt, und* $\partial X$ *trage die induzierte Orientierung. Dann*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

**22.2 Korollar.** *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen, sei* $M \subseteq U$ *eine kompakte, orientierte,* $n$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei* $\omega \in \Omega_1^{n-1}(U)$*. Dann*

$$\int_M d\omega = 0.$$

*22.3 Bemerkung.* Es sei $S$ eine orientierte , zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und es sei $n\colon S \to \mathbb{R}^3$ die Normalenabbildung wie in Satz 20.6. Ferner sei $X \subseteq S$ eine zweidimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit von $S$ und $\nu\colon \partial X \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld an $\partial X$. Für $a \in \partial X$ sei $\tau(a) \in T_a(\partial X)$ dasjenige Element der Länge 1, für welches

$$\det(n(a), \nu(a), \tau(a)) > 0.$$

Dann ist $\tau$ das *positiv orientierte Tangenteneinheitsvektorfeld an* $\partial X$. (Die Vektoren $n(a)$, $\nu(a)$ und $\tau(a)$ bilden ein *rechtshändiges Dreibein.*)

**22.4 Satz** (Klassischer Integralsatz von Stokes). *In der Situation von Bemerkung 22.3 seien* $U$ *eine offene Obermenge von* $X$ *und* $w \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$*. Dann gilt*

$$\int_X \langle \operatorname{rot} w, n \rangle \, d\sigma_2 = \int_{\partial X} \langle w, \tau \rangle \, d\sigma_1.$$

*22.5 Bemerkung.* In der Situation von Satz 22.4 sei $a \in U$, und $n \in \mathbb{R}^3$ sei ein beliebiger fester Einheitsvektor. Wir setzen $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \langle x - a, n \rangle = 0\right\}$ und $X_r = \{x \in S | \|x - a\|_2 \leq r\}$. Dann gilt

$$\langle \operatorname{rot} w(a), n \rangle = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{X_r} \langle \operatorname{rot} w, n \rangle \, d\sigma_2 = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial X_r} \langle w, \tau \rangle \, d\sigma_1.$$

**22.6 Satz.** *Es seien* $U \subset \mathbb{R}^3$ *und* $I \subset \mathbb{R}$ *offen. Es seien* $E, B\colon U \times I \to \mathbb{R}^3$ *von der Klasse* $C^1$*. Es sind äquivalent:*

*(a)* $\operatorname{rot} E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$.

*(b) Für jedes* $a \in U$*, jeden Einheitsvektor* $n \in \mathbb{R}^3$ *und jede zweidimensionale, abgeschlossene, berandete Untermannigfaltigkeit* $X$ *von* $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle x - a, n\rangle = 0\}$ *gilt*

$$\frac{d}{dt}\int_X \langle B, n\rangle \, d\sigma_2 = -\int_{\partial X} \langle E, \tau\rangle \, d\sigma_1.$$

$B$ und $E$ verstehen wir als zeitabhängige Vektorfelder. Wenn $E$ des elektrische und $B$ das Magnetfeld ist, dann ist (a) die *Maxwellsche Gleichung.*

# 23. Der Brouwersche Fixpunktsatz

**23.1 Lemma.** *Sei* $n \geq 2$. *In* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *betrachten wir die* $(n-1)$*-Form*

$$\sigma = \frac{1}{\|x\|_2^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

*Dann* $d\sigma = 0$ *und* $\int_{S^{n-1}} \sigma \neq 0$.

**23.2 Lemma.** *Sei* $U$ *eine offene Obermenge der abgeschlossenen Einheitskugel* $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ *und sei* $\rho \colon U \to S^{n-1}$ *eine glatte Abbildung. Dann existiert* $x \in S^{n-1}$ *mit* $\rho(x) \neq x$.

**23.3 Lemma.** *Für* $r > 1$ *sei* $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$. *Es sei* $f \colon B(r) \to \overline{B}$ *eine glatte Abbildung. Dann besitzt* $f$ *einen Fixpunkt.*

**23.4 Satz** (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei* $f \colon \overline{B} \to \overline{B}$ *stetig. Dann besitzt* $f$ *einen Fixpunkt.*

**23.5 Korollar.** *Sei* $W$ *homöomorph zu* $\overline{B}$ *und sei* $f \colon W \to W$ *stetig. Dann besitzt* $f$ *einen Fixpunkt.*

**23.6 Satz.** $K \subset \mathbb{R}^n$ *sei kompakt und konvex und besitze mindestens einen inneren Punkt. Dann ist* $K$ *homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel* $\overline{B}$ *des* $\mathbb{R}^n$.

**23.7 Satz** (Satz von Frobenius und Perron). *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *eine Matrix, deren sämtliche Einträge nichtnegativ sind. Dann besitzt* $A$ *einen Eigenvektor mit nichtnegativen Einträgen.*