Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 20.12.2023

Blatt 10

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein eigentlicher, abstrakter Funktionalkalkül, wobei X ein Banachraum und $\Phi\colon \mathcal{E} \to L(X)$ ein Algebrenhomomorphismus ist. Zeigen Sie
   (a) (1P) $1 \in \mathcal{M}_r$.
   (b) (2P) $\Psi(1) = \mathrm{id}_X$.

2. Es sei $\mathbb{C}[Z]$ die Algebra der komplexen Polynome und $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ die Algebra der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $M \in L(\mathbb{C}^N)$ gegeben. Mit $\Phi\colon \mathbb{C}[Z] \to L(\mathbb{C}^N)$ bezeichnen wir den Einsetzungshomorphismus
$$\Phi\left(\sum_{n=0}^{d} a_j z^j\right) = \sum_{j=0}^{d} a_j M^j.$$
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}[Z], \mathcal{M}(\mathbb{C}), \Phi)$ ein eigentlicher, abstrakter Funktionalkalkül ist.
   (b) (4P) Zeigen Sie, dass $p \in \mathbb{C}[Z]$ genau dann ein Regularisierer ist, wenn $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(M)$.
   (c) (4P) Zeigen Sie
$$\mathcal{M}(\mathbb{C})_r = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{C}[Z],\ g(z) \neq 0 \text{ für alle } z \in \sigma(M) \right\}.$$
   (d) (2P) Es sei $0 \notin \sigma(M)$. Bestimmen Sie $\Psi\left(\frac{1}{z}\right)$.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum (also $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß). Es sei
$$\mathcal{N} = \{f\colon X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-messbar} \mid f = 0\ \mu\text{-fast überall}\}.$$
Wir setzen
$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f\colon X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-messbar} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$$
wobei
$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| \;\middle|\; N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0 \right\}.$$
Schließlich setzen wir
$$L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu) \,/\, \mathcal{N}.$$

Bitte wenden!

Zeigen Sie

(a) (4P) Zu jedem $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ gibt es $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so dass

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|.$$

(b) (3P) Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ und $g \in \mathcal{N}$ gilt $\|f\|_\infty = \|f + g\|_\infty$.

(c) (3P) $L^\infty(\mu)$ wird durch $\|\cdot\|_\infty$ zu einem normierten Raum.

(d) (3P) (Höldersche Ungleichung) Für $f \in L^1(\mu)$ und $g \in L^\infty(\mu)$ gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Hinweis: Sehr ähnlich zum Fall $1 \leq p < \infty$ kann man zeigen, dass $L^\infty(\mu)$ ein Banachraum ist.

4. Sei $X = C[0,1]$ und sei $V \in L(X)$, $Vf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ der Volterra-Operator.

   (a) (5P) Sei $g \in C^1[0,1]$ und sei $\zeta \neq 0$. Die Gleichung

   $$f = R(\zeta, V)g \tag{1}$$

   lässt sich als Anfangswertproblem für eine gewöhliche Differentialgleichung schreiben. Formulieren und lösen Sie dieses Anfangswertproblem.

   (b) (7P) Formen Sie die Lösung aus (a) so um, dass sie auch für $g \in C[0,1]$ Sinn macht. Zeigen Sie, dass die umgeformte Lösung auch für $g \in C[0,1]$ eine Lösung von (1) liefert.

Frohes Fest!

Abgabe: Mi, 10.01.2024, 12:20 im ILIAS