Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 10.01.2024

Blatt 11

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. (10P) Sei $X = C[0,1]$ und sei $V \in L(X)$, $Vf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ der Volterra-Operator. Zeigen Sie, dass V sektoriell ist.

   Hinweis: Auf Blatt 10 wurde gezeigt, dass für $\zeta \neq 0$ gilt
   $$R(\zeta, V)(g)(x) = \frac{1}{\zeta} g(x) + \frac{1}{\zeta^2} e^{x/\zeta} \int_0^x g(t) e^{-t/\zeta}\,\mathrm{d}t.$$

   Warnung: Trotz $\sigma(V) = \{0\}$ ist der Spektralwinkel von V nicht 0.

2. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und es sei $a \in L^\infty(\mu)$.

   (a) (3P) Zeigen Sie, dass $\operatorname{essrange}(a)$ der Träger des Borelmaßes $A \mapsto \mu\big(a^{-1}(A)\big)$ ist.

   Hinweis: Es braucht nicht gezeigt zu werden, dass die angegebene Abbildung ein Borelmaß ist.

   (b) (7P) Zeigen Sie
   $$\|a\|_\infty = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{essrange}(a)\}.$$

3. (12P) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und es sei $1 \leq p \leq \infty$. Für gegebenes $a \in L^\infty(\mu)$ wird der Multiplikationsoperator erklärt durch
   $$M_a \colon L^p(\mu) \to L^p(\mu), \quad f \mapsto af.$$

   Zeigen Sie, dass M_a beschränkt mit $\|M_a\| = \|a\|_\infty$ ist.

   Hinweis: Aufgabe 3a) von Blatt 10 ist nützlich. Aus der Definition von $\|\cdot\|_\infty$ folgt außerdem für jedes $\epsilon > 0$ sofort, dass
   $$\mu\Big(\big\{x \in X \;\big|\; |a(x)| > \|a\|_\infty - \epsilon\big\}\Big) > 0.$$

   Es genügt, die σ-Endlichkeit des Maßes zu fordern.

4. (13P) Es sei M_a der Multiplikationsoperator aus Aufgabe 3. Zeigen Sie

   (a) $\sigma(M_a) = \operatorname{essrange}(a)$.

   (b) Für $\lambda \in \rho(M_a)$ gilt
   $$\|R(\lambda, M_a)\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \operatorname{essrange}(a))}.$$

Abgabe: Mi, 17.01.2024, 12:20 im ILIAS