

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. (8P) Der Operator A im $L^1([0, \infty[)$ sei definiert durch $D(A) = W_0^{1,1}[0, \infty[$ und $Af = f'$. Zeigen Sie, dass A sektoriell ist.

Hinweis: Führen Sie die Aufgabe auf Beispiel 15.26 zurück, indem Sie $g \in L^1[0, \infty[$ durch Null zu einer Funktion in $L^1(\mathbb{R})$ fortsetzen.

2. (7P) Es sei A der durch $D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R})$ und $Af = f'$ gegebene Operator im $L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie $\sigma(A) = i\mathbb{R}$.

Damit ist gezeigt, dass $A \notin \text{Sect}(\omega)$, falls $\omega < \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Eine Inklusion steht in der Vorlesung. Um für $\lambda \in i\mathbb{R}$ zu zeigen, dass $\lambda \in \sigma(A)$, wählen Sie $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\varphi(0) = 1$ und machen einen Ansatz der Form

$$f_n(x) = \frac{e^{iax}}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Abgabe: Mi, 24.01.2024, 12:20 im ILIAS