Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 18.10.2023

Blatt 2

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. Es sei A eine Banachalgebra, sei e die Eins in A und es seien $a, b \in A$.
   (a) (5P) Zeigen Sie, dass $e - ab \in \mathcal{G}(A)$ genau dann, wenn $e - ba \in \mathcal{G}(A)$.
   Hinweis: Setzen Sie $c = (e - ab)^{-1}$ und betrachten Sie das Produkt $(e - ba)(e + bca)$.
   (b) (5P) Sei $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \sigma(ab)$ genau dann, wenn $\lambda \in \sigma(ba)$.

2. (10P) Sei A eine Banachalgebra, seien $a, b \in A$ und sei $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie $ab - ba \neq \lambda e$.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1, um aus $ab = \lambda e + ba$ zu schließen, dass $\sigma(ab)$ unbeschränkt ist.

3. Sei $H^\infty(\mathbb{D})$ der auf Blatt 1 erklärte Hardyraum und sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{D}$, die gegen ein $z \in \partial\mathbb{D}$ konvergiert.
   (a) (3P) Zeigen Sie, dass durch
   $$I = \left\{ f \in H^\infty(\mathbb{D}) \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 \right\}$$
   ein Ideal in $H^\infty(\mathbb{D})$ gegeben wird.
   (b) (3P) Mit $H(\mathbb{D})$ bezeichnen wir den Raum aller holomorphen Funktionen auf $\mathbb{D}$. Ist
   $$J = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 \right\}$$
   ein Ideal in $H(\mathbb{D})$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (c) (4P) Zeigen Sie, dass es ein $\varphi \in \mathrm{Sp}\,(H^\infty(\mathbb{D}))$ gibt, so dass $\varphi(f) = 0$ für alle $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\lim_{\zeta\to z} f(\zeta) = 0$.

4. Sei A die Banachalgebra aller stetigen, beschränkten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, versehen mit der Supremumsnorm. (Dass A eine Banachalgebra ist, braucht nicht gezeigt zu werden.)
   (a) (2P)Für $x_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir
   $$I = \{ f \in A \mid f(x_0) = 0 \}.$$
   Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal ist.
   (b) (8P) Ferner definieren wir
   $$J = \left\{ f \in A \;\middle|\; \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$
   Zeigen Sie, dass J zwar ein Ideal, aber kein maximales ist.

   Hinweis: Lemma 1.24

Abgabe: Mi, 25.10.2023, 12:20 im ILIAS