Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 25.10.2023

Blatt 3

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. Betrachten Sie die C^*-Algebra $A = L(\ell^2)$.
   (a) (1P) Bestimmen Sie den Kommutanten $\{\mathrm{id}\}'$.
   (b) (9P) Bestimmen Sie den Bikommutanten $(\{\mathrm{id}\}')'$.
   Hinweis: Einige Elemente sind offensichtlich in $(\{\mathrm{id}\}')'$. Alle anderen sind nicht drin. Um sie auszuschließen, kommt man mit Elementen der Form
   $$f_{i,j} \colon \ell^2 \to \ell^2, \quad f_{i,j}(e_m) = \begin{cases} e_j, & m = i, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$
   aus. Das ist genau wie bei dem entsprechenden Satz der Linearen Algebra.

2. (10P) Sei A eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einer Norm $\|\cdot\|$, bzgl. welcher sie vollständig ist. Es gebe $C > 0$, so dass für alle $a, b \in A$ gilt $\|ab\| \leq C\|a\|\|b\|$. Zeigen Sie, dass es eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm gibt, bezüglich der A eine Banachalgebra ist.

   Hinweis: Für $a \in A$ ist M_a, definiert durch $M_a(x) = ax$, ein Element von $L(A)$. Nutzen Sie, dass $L(A)$ eine Banachalgebra ist, um die gesuchte Norm zu erhalten.

3. (a) (2P) Für eine beschränkte Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ sei $a \in L(\ell^2)$ definiert durch
   $$a(x) = (\mu_j x_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$
   Zeigen Sie, dass $\{\mu_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma(a)$.
   (b) (2P) Geben Sie eine beschränkte Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass in (a) die Gleichheit gilt.
   (c) (2P) Geben Sie eine beschränkte Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass in (a) die Gleichheit nicht gilt.
   (d) (4P) Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Konstruieren Sie ein $a \in L(\ell^2)$ mit $\sigma(a) = K$.

4. Für ein $k \in C\big([0,1]^2\big)$ sei $V \in L(C[0,1])$ definiert durch
   $$V(f)(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) (7P) Mit V^n bezeichnen wir die n-te Potenz von V in der Algebra $L(C[0,1])$, d. h. die n-fache Hintereinanderausführung von V.
   Zeigen Sie die Existenz eines $C > 0$, so dass
   $$|V^n(f)(s)| \leq C^n \frac{s^n}{n!} \|f\|_\infty.$$
   (b) (3P) Zeigen Sie $\sigma(V) = \{0\}$ durch Anwendung der Spektralradiusformel.

Abgabe: Mi, 01.11.2023, 12:20 im ILIAS