Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 01.11.2023

Blatt 4

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. (a) (5P) Es sei $K = [0,1]$. Auf $C(K) = C_c(K)$ wird durch
$$T\colon f \mapsto f(0) - f(1)$$
ein stetiges lineares Funktional gegeben. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz für Maße folgt die Existenz eines signierten Maßes μ, so dass
$$Tf = \int f \,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$
für alle $f \in C(K)$. Geben Sie $\mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{B}(K)$ an.
Hinweis: Erraten Sie μ und konstruieren Sie dazu μ_+ und μ_-, um (1) nachzuweisen.

   (b) (2P) Es seien A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Das Spektrum von a bestehe aus einem Punkt. Zeigen Sie die Existenz eines $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $a = \lambda e$.

   (c) (1P) Geben Sie eine C^*-Algebra A und ein $a \in A$ an, dessen Spektrum aus einem Punkt besteht und das kein Vielfaches der Eins ist.

   (d) (2P) Es seien A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal mit $\sigma(a) \subseteq \{0,1\}$. Zeigen Sie, dass a ein Idempotent ist, dass also $a^2 = a$ gilt.

2. (10P) Für eine beliebige quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ hatten wir in der Analysis II das Matrixeponential
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$
erklärt. Wenn A normal ist, dann existiert der in Satz 2.19 erklärte $*$-Homomorphismus $\Phi\colon C(\sigma(A)) \to L(\mathbb{C}^N)$ mit $\Phi(z) = A$. Zeigen Sie, dass $\Phi(\exp)$ mit dem Matrixexponential übereinstimmt.

3. (10P) Seien A eine C^*-Algebra, $a \in A$ normal und $\Phi\colon C(\sigma(a)) \to A$ der nach Satz 2.19 existierende $*$-Homomorphismus mit $\Phi(z) = a$. Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir $b(t) = \Phi(\exp(tz))$. Zeigen Sie $b' = ba$ durch Berechnung des Differentialquotienten.

4. (10P) Es H ein Hilbertraum und $B\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform. Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt die Existenz eines $T \in L(H)$, so dass $B(x,y) = (Tx,y)$ für alle $x,y \in H$.

   Wir nehmen zusätzlich noch die Existenz eines $C > 0$ an, so dass
$$|B(x,y)| \geq C|(x,y)|$$
für alle $x,y \in H$. Zeigen Sie, dass T ein Isomorphismus auf sein Bild ist.

Abgabe: Mi, 08.11.2023, 12:20 im ILIAS