Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 08.11.2023

Blatt 5

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. (10P) Es sei $A \in L(\mathbb{C}^N)$ normal mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenräumen $V_1, \dots, V_n$. Für $j = 1, \dots, n$ sei $(b_{j,k})_{k=1,\dots,\nu_j}$ eine Orthonormalbasis von V_j. Mit $\Phi\colon C(\sigma(A)) \to L(\mathbb{C}^N)$ werde der stetige Funktionalkalkül von A bezeichnet. Zeigen Sie für $f \in C(\sigma(A))$ und $x \in \mathbb{C}^N$
$$\Phi(f)x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\nu_j} f(\lambda_j)(x, b_{j,k})b_{j,k}.$$
Hinweis: Verwenden Sie die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2.19.

2. (10P) Es gelten die Bezeichnungen aus Aufgabe 1. Ferner sei $E\colon \mathcal{B}(\sigma(A)) \to L(\mathbb{C}^N)$ das Spektralmaß von A. Zeigen Sie für $M \in \mathcal{B}(\sigma(A))$
$$E(M)x = \sum_{\lambda_j \in M} \sum_{k=1}^{\nu_j} (x, b_{j,k})b_{j,k}.$$
Hinweis: Nutzen Sie die Eindeutigkeitsaussage aus Theorem 4.24.

3. Der Operator $A \in L(L^2[0,1])$ sei gegeben durch $Af(x) = xf(x)$.
   (a) (1P) Zeigen Sie, dass A selbstadjungiert ist.
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \setminus [0,1] \subseteq \rho(A)$.
   (c) (7P) Sei $\lambda \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \sigma(A)$.
   Hinweis: Für $\epsilon > 0$ und $N_\epsilon = [\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon] \cap [0,1]$ betrachten Sie $(\lambda \,\mathrm{id} - A)\chi_{N_\epsilon}$.

4. (10P) Es sei A wie in Aufgabe 3. Dort wurde gezeigt, dass $\sigma(A) = [0,1]$.
   (a) Bestimmen Sie das Spektralmaß von A.
   (b) Es sei $\Psi\colon \mathcal{M}^\infty([0,1]) \to L(L^2[0,1])$ der Funktionalkalkül von A. Zeigen Sie
   $$\Psi(f)(g) = fg, \quad f \in \mathcal{M}^\infty([0,1]), g \in L^2[0,1].$$

   Man muss wissen, dass für eine Borelmessbare Funktion $h \geq 0$ die Abbildung $M \mapsto \int_M h \,\mathrm{d}\lambda_1$ ein Borelmaß ist und dass das zugehörige Integral gegeben wird durch $\int fh \,\mathrm{d}\lambda_1$. Solche Aussagen aus der Analysis III können verwendet werden.

Abgabe: Mi, 15.11.2023, 12:20 im ILIAS