Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 15.11.2023

Blatt 6

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. (10P) Es sei $A \in L(L^2[0,1])$ gegeben durch $Af(x) = xf(x)$. Zeigen Sie, dass A keinen Eigenwert besitzt.

2. (10P) Geben Sie einen Hilbertraum H, einen normalen Operator $A \in L(H)$ und ein $g \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$ an, so dass
$$g(\sigma(A)) \neq \sigma(\Psi(g)).$$
Hierbei ist $\Psi\colon \mathcal{M}^\infty(\sigma(A)) \to L(H)$ der Funktionalkalkül von A.

   Hinweis: Es ist möglich, ein Beispiel aus den Operatoren zu konstruieren, die aus Vorlesung und Übung bereits bekannt sind.

3. (10P) Sei $Y \subset [-R, R[\subset \mathbb{R}$ kompakt, sei H ein Hilbertraum, sei $E\colon \mathcal{B}(Y) \to L(H)$ ein Spektralmaß auf Y und sei $f \in C(Y)$. Zeigen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1-2^n}^{2^n} f\left(\frac{jR}{2^n}\right) E\left(\left[\frac{(j-1)R}{2^n}, \frac{jR}{2^n}\right[\cap Y\right) = \int f \, \mathrm{d}E.$$

   Hinweis: Vergessen Sie nicht, die Konvergenz der linken Seite in $L(H)$ zu zeigen. Zum Beweis der Gleichheit benutzen Sie die Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.22. Bei diesem Satz genügt die Aussage (a) bereits für die Eindeutigkeit.

4. (10P) Es sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und es sei $A \in L(H)$ normal mit Spektralmaß $E\colon \mathcal{B}(\sigma(A)) \to L(H)$.

   (a) (2P) Zeigen Sie: Entweder ist $\sigma(A)$ endlich, oder es gibt eine Folge $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}(\sigma(A))$, so dass $E(M_j) \neq 0$ für alle j und $M_j \cap M_k = \emptyset$ für $j \neq k$.

   (b) (8P) Sei A zusätzlich noch injektiv und positiv. Zeigen Sie, dass A unendlich viele verschiedene Quadratwurzeln besitzt, also unendlich viele $B \in L(H)$ mit $B^2 = A$.

   Hinweise:

   i. Der Eindeutigkeitssatz in der Vorlesung bezieht sich auf *positive* Quadratwurzeln.

   ii. In der Einführung in die Funktionalanalysis wurde gezeigt, dass jeder Hilbertraum eine Orthonormalbasis besitzt.

Abgabe: Mi, 15.11.2023, 12:20 im ILIAS