Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 22.11.2023

Blatt 7

Übungen zur Funktionalanalysis I

1. (10P) Es sei $A \in L(\mathbb{C}^N)$ ein normaler Operator und es sei $\Phi\colon C(\sigma(A)) \to L(\mathbb{C}^N)$ der stetige Funktionalkalkül mit $\Phi(z) = A$.

   Die Eigenwerte von A seien paarweise verschieden. Die zugehörigen Eigenvektoren seien $v_1, \dots, v_N$. Ferner seien $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $v = \sum_{j=1}^N a_j v_j$ ein zyklischer Vektor von Φ ist.

2. (10P) Es H ein Hilbertraum und es sei $A \in L(H)$ normal. Es sei $\Phi\colon C(\sigma(A)) \to L(H)$ der stetige Funktionalkalkül mit $\Phi(z) = A$. Zeigen Sie:

   Wenn A einen mehrfachen Eigenwert besitzt, dann besitzt Φ keinen zyklischen Vektor.

3. Es sei $A \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ gegeben durch
$$A((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass A unitär ist.
   (b) (5P) Zeigen Sie $\sigma(A) = S^1$.
   (c) (3P) Wegen (a) und (b) existiert der stetige Funktionalkalkül $\Phi\colon C(S^1) \to L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ mit $\Phi(\mathrm{id}_{S^1}) = A$.
   Zeigen Sie, dass b mit
$$b_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j \neq 0, \end{cases}$$
   ein zyklischer Vektor von Φ ist.

4. (10P) Es seien A und b wie in Aufgabe 3. Bestimmen Sie ein Maß μ_b und eine unitäre Transformation
$$U\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(S^1, \mu_b),$$
   so dass $\Delta^b(\mathrm{id}_{S^1}) \circ U = U \circ A$ mit Δ^b wie in Satz 6.5.

   Hinweis: Das *Haarmaß* η auf S^1 ist das Borelmaß auf S^1, welches dadurch bestimmt ist, dass für $a < b \le a+1$ gilt $\eta\big(\big\{e^{2\pi it} \,\big|\, a \le t < b\big\}\big) = b-a$. Für $f \in C(S^1)$ gilt
$$\int_{S^1} f \,\mathrm{d}\eta = \int_{[0,1]} f(e^{2\pi it}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Abgabe: Mi, 29.11.2023, 12:20 im ILIAS