Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 29.11.2023

Blatt 8

# Übungen zur Funktionalanalysis I

Auf dem gesamten Aufgabenblatt ist $I = ]0,1[$ definiert.

1. (10P) Für $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ sei $A \in L(H_0^1(I))$ gegeben durch $Af = \varphi f$. Zeigen Sie, dass $A$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\varphi \equiv 0$.

2. Für $1 \leq p < \infty$ sei ein Operator $A$ von $L^p(I)$ nach $L^p(I)$ definiert durch $D(A) = \mathcal{D}(I)$ und $A\varphi = \varphi'$ für $\varphi \in D(A)$.

   (a) (3P) Zeigen Sie, dass $A$ nicht abgeschlossen ist.

   (b) (7P) Zeigen Sie, dass $A$ abschließbar ist.

3. (10P) Für $1 \leq p < \infty$ sei ein Operator $A$ von $L^p(I)$ nach $\mathbb{C}$ definiert durch $D(A) = C(I)$ und $Af = f\left(\frac{1}{2}\right)$ für $f \in D(A)$. Zeigen Sie, dass $A$ nicht abschließbar ist.

4. Für $1 \leq p < \infty$ sei ein Operator $B$ von $L^p(I)$ nach $L^p(I)$ definiert durch $D(B) = \mathcal{C}^1([0,1])$ und $B\varphi = \varphi'$ für $\varphi \in D(B)$.

   (a) (3P) Zeigen Sie, dass $B$ abschließbar ist.

   (b) (7P) Zeigen Sie, dass die Abschließung von $B$ eine echte Erweiterung der Abschließung des Operators $A$ aus Aufgabe (2) ist.

**Abgabe:** Mi, 06.12.2023, 12:20 im ILIAS